連続時間のダイナミクス

時刻 t における個体数 $N(t)$ の、時刻 t における変化率は
$N(t)$ を t で微分したもの

変化率が正：増える
変化率が負：減る
変化率の絶対値が大きい・小さい：変化が大きい・小さい

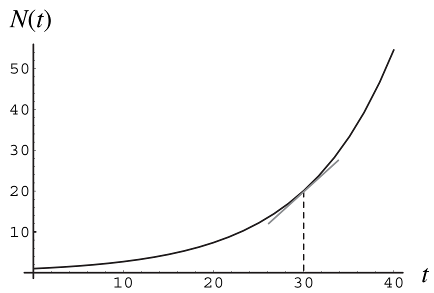
$$\frac{dN}{dt} = (b-d)N = rN$$

b : 1 個体あたり出生率
d : 1 個体あたり死亡率
r : 1個体あたり正味の増加率

微分方程式

$N(t)$ の微分が $N(t)$ 自身に比例するような関数 $N(t)$ を求めたい

$$\frac{dN}{dt} = rN$$



解は初期値 $N(0)$ を用いて

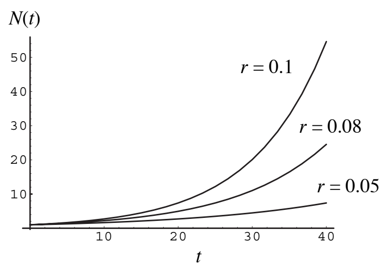
$$N(t) = N(0)e^{rt}$$

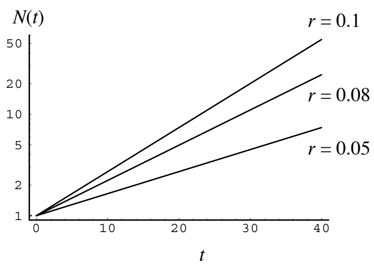
連続時間の指数増加

$$N(t) = N(0)e^{rt}$$

$r > 0$ のとき指数増加

$$\log N(t) = \log N(0)e^{rt} = \log N(0) + \log e^{rt}$$
$$= \log N(0) + rt$$



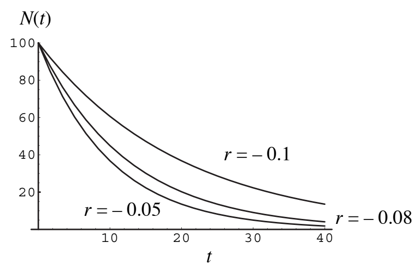


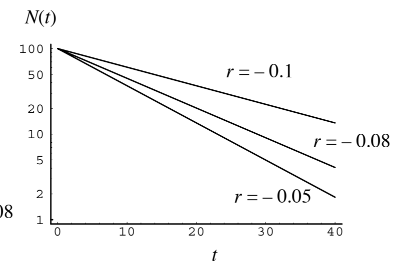
連続時間の指数減少

$$N(t) = N(0)e^{rt}$$

$r < 0$ のとき指数減少

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$$





連続時間のロジスティックモデル

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N$$

1 個体あたりの正味の増加率が N に比例して減少

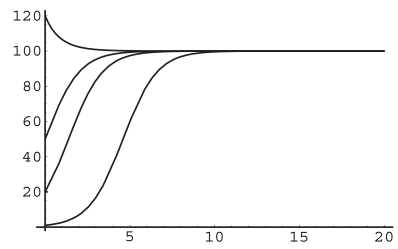
解は、 $$N(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - N(0)}{N(0)} e^{-rt}}$$

$r > 0$ の値によらず $N(t)$ は K へ収束

連続時間のロジスティック増殖

$$N(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - N(0)}{N(0)} e^{-rt}}$$ $r = 1, K = 100$

個体数 N_t



時刻 t

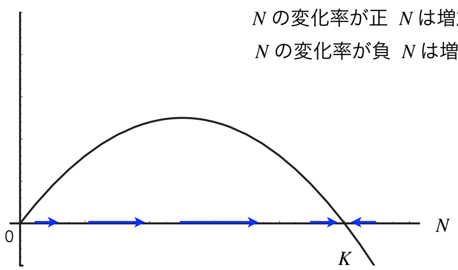
成長の限界

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N$$

N の変化率

N の変化率が正 N は増加

N の変化率が負 N は増加



連続時間のロジスティック増殖では環境収容量 K に収束

個体数ダイナミクスの例 1

ゾウリムシの個体数ダイナミクス

Paramecium aurelia

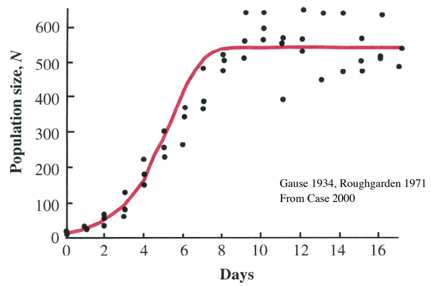


Image from http://mtlab.biol.tsukuba.ac.jp/www/PDB/Images/Ciliophora/Paramecium/aurelia/

時間遅れ

$$\frac{dN(t)}{dt} = r\left(1-\frac{N(t-T)}{K}\right)N(t)$$

1 個体あたりの正味の増加率が

時刻 T だけ過去にさかのぼった時点の N に比例して減少

生物学的な時間遅れ：繁殖開始に要する成熟期間など

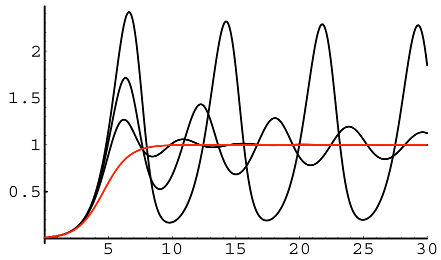
時間遅れ T が大きくなると、系は振動を示す

時間遅れを伴うロジスティック増殖

$$\frac{dN(t)}{dt} = r\left(1-\frac{N(t-T)}{K}\right)N(t)$$

振動が起こる条件

$$rT > \pi$$



$K = 1$

$r\,T = 0.3$
$r\,T = 1.2$
$r\,T = 1.8$

個体数ダイナミクスの例４

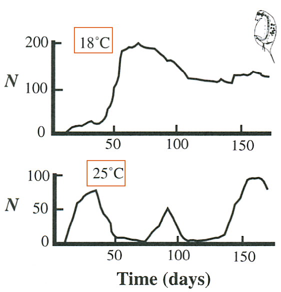
水中微生物の個体数ダイナミクス

ミジンコ

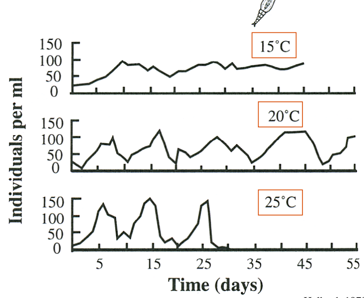
Image from
http://hp.brs.nihon-u.ac.jp/~ocean/kenkyu/hormone.html

クルマムシ

Image from
http://dmc.utep.edu/rotifer/html/nsp1.html

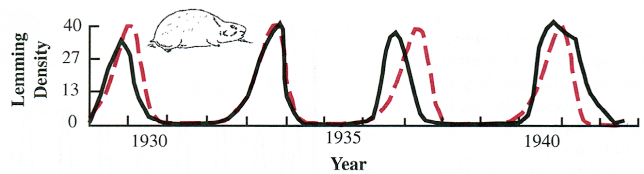


Pratt 1943
From Case 2000



Halbach 1979
From Case 2000

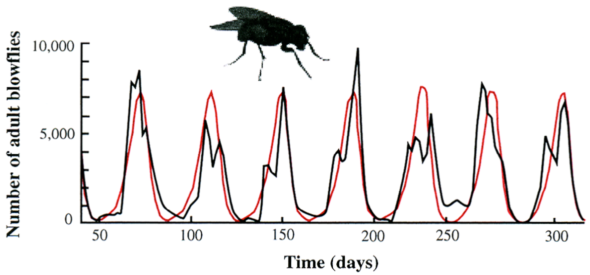
振動する個体群動態の例 1



黒の実線：個体密度の観察値
赤の点線：時間遅れロジスティックモデル

$r = 3.33$ / year, $T = 0.72$ year

振動する個体群動態の例２



赤線：時間遅れのロジスティックモデル　$rT = 2.1$

時間遅れ T は、ハエの幼虫が成虫になるまでの時間

連続時間のダイナミクス

一般に、１種系の連続時間の個体群ダイナミクスは微分方程式

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(N)N$$

で与えられる

１個体あたりの増加率 f を決めることで、N の振る舞いが決まる

1. モデル（微分方程式）の決定
2. モデルの解析
3. モデルの振る舞いと現実系の比較