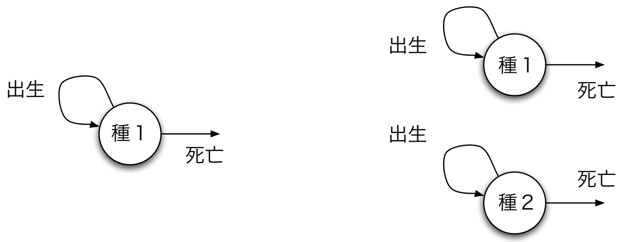
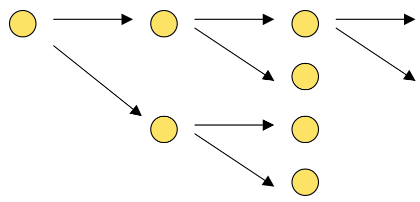
1種系の個体群動態モデル

- 単一の生物種のみに注目した1種系のモデル
- 生物種は互いに、食う・食われるなどの関係で結びついている　– 多種系のモデル –



仮想的な生き物のダイナミクス

各個体が一定の時間間隔で 2個体に分裂する生き物を考える



t	0	1	2	3
個体数 N_t	1	2	4	?

離散時間のダイナミクス1

時刻 t における個体数 N_t に関する差分式（漸化式）を得る

$$N_{t+1} = 2N_t$$

$$\begin{aligned} N_1 &= 2N_0 \\ N_2 &= 2N_1 = 2 \times 2N_0 = 2^2 N_0 \\ N_3 &= 2N_2 = 2 \times 2 \times 2N_0 = 2^3 N_0 \\ &\vdots \\ N_t &= 2N_{t-1} = 2^t N_0 \end{aligned}$$

N_0 を決めると全ての時刻の N_t が決まる

1種系離散ダイナミクスのモデル

一般に、単位時間内に各個体が r 倍に増殖する場合

$$N_{t+1} = rN_t$$

この差分式の解は

$$N_t = r^t N_0$$

$r > 1$ の時、指数的に増加、最終的には発散

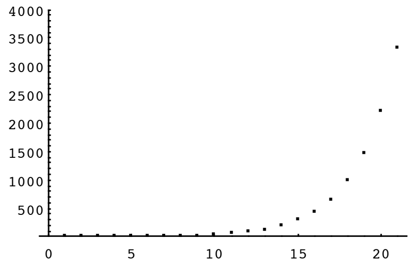
$$\lim_{t \to \infty} N_t = \infty$$

指数増加の数値例

$N_t = r^t N_0$　　$N_0 = 1$, $r = 1.5$ の場合の数値解

{1, 1.5, 2.25, 3.375, 5.0625, 7.59375, 11.3906, 17.0859, 25.6289, 38.4434, 57.665, 86.4976, 129.746, 194.62, 291.929, 437.894, 656.841, 985.261, 1477.89, 2216.84, 3325.26}

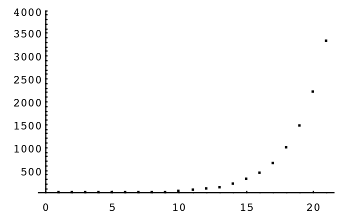
個体数 N_t

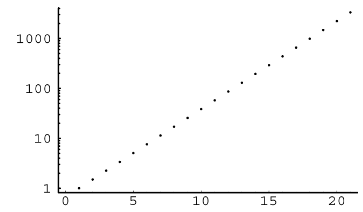


時刻 t

指数増加の対数表示

$y = 10^x$ となる x を y の（常用）対数とよぶ





$y = e^x$ となる x を y の（自然）対数とよぶ

$e = 2.71828...$

指数増加の対数表示２

$N_t = r^t N_0$　　　両辺の対数 log をとる

積の対数は対数の和であることを用いて

$$\begin{aligned}\log N_t &= \log r^t N_0 = \log r^t + \log N_0 \\ &= \log N_0 + t \log r\end{aligned}$$

N_t が指数増加する時、$\log N_t$ は時刻 t に比例して増加

指数増加の例

大腸菌の増殖

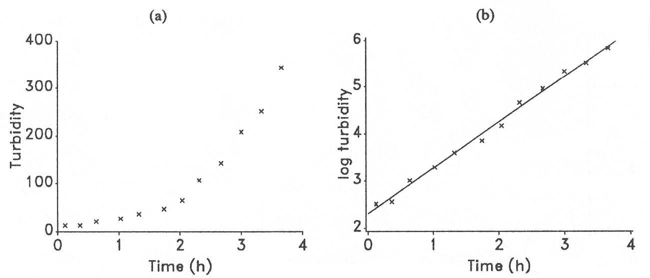
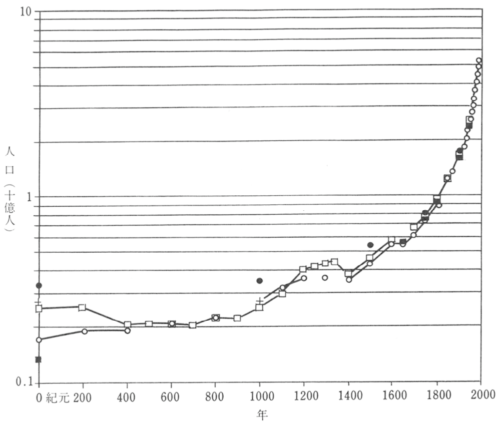


Figure 1.3 Exponential growth in the bacterium *E. coli.* (a) Increase in turbidity; (b) increase in log turbidity showing fitted straight line of exponential growth with rate constant $r = 0.84\ \mathrm{h}^{-1}$ A turbidity of 100 units corresponds to approximately 10^8 cells/ml.

Brown and Rothery 1993

地球上の人口増加



地球人口は過去２０００年間、指数増加よりも急激に増加

指数減少

単位時間あたりの個体の生存確率を s とすると

$$N_{t+1} = sN_t$$

この差分式の解は

$$N_t = s^t N_0$$

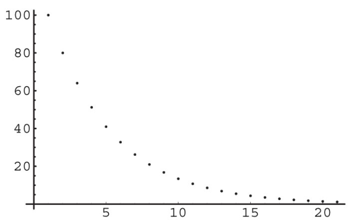
$s < 1$ なので、指数的に減少、最終的にはゼロへ収束

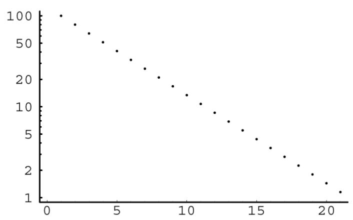
$$\lim_{t \to \infty} N_t = 0$$

指数減少の数値例

$N_t = s^t N_0$　$N_0 = 100$, $s = 0.8$ の場合の数値解

{100, 80., 64., 51.2, 40.96, 32.768, 26.2144, 20.9715, 16.7772, 13.4218, 10.7374, 8.58993, 6.87195, 5.49756, 4.39805, 3.51844, 2.81475, 2.2518, 1.80144, 1.44115, 1.15292}





対数表示では傾き $\log s < 0$ の直線

指数減少の例

コマドリ Robin の生存データ (Lack 1965)

鳥を捕獲して足輪を装着し、数年間にわたり追跡調査

個体数	129	49	20	8	2
年	0	1	2	3	4+

コマドリの生存確率

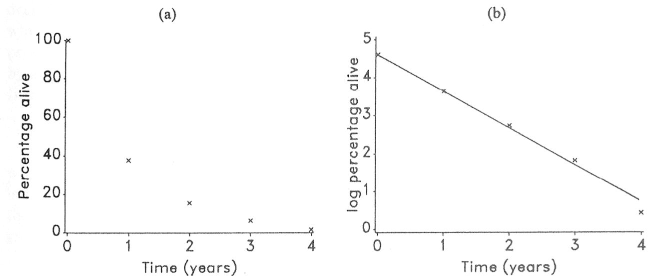


Figure 1.7 Pattern of survival in a cohort of 129 adult robins over 4 years after ringing. (a) Percentage of survivors; (b) log percentage of survivors with fitted straight line for exponential decline and constant annual survival rate of 0.38.

指数減少の対数スケールでの直線の傾きは $\log s = -0.97$

年間生存確率 $s = e^{-0.97} = 0.38$

平均寿命

年間生存確率 s

0 1 2 3 ... i $i+1$

1歳で死亡する確率 $1 - s$

2歳で死亡する確率 $s(1-s)$

i 歳で死亡する確率 $s^{i-1}(1-s)$

平均寿命 $1 \times (1-s) + 2 \times s(1-s) + 3 \times s^2(1-s) + \cdots + i \times s^{i-1}(1-s) + \cdots$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i s^{i-1}(1-s) = \frac{1}{1-s}$$

$s = 0.38$/year の時、

$T = 1.61$ years

出生＋死亡のモデル

- バルカン半島原産のシラコバト Collared Dove が1955年イギリスに持ち込まれて大繁殖
- 10年間で 4匹から 18,855匹まで増加

Image from http://www.mbr-pwrc.usgs.gov/id/framlst/i3153id.html

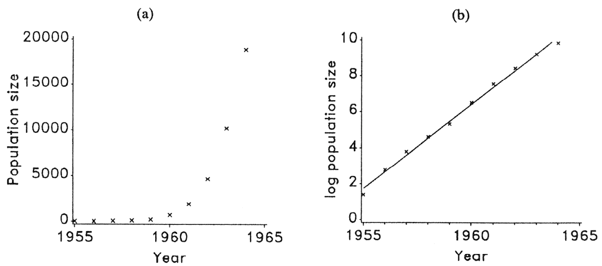


Figure 1.6 Exponential growth in a population of collared doves. (a) Increase in the number of adults plus young at end of breeding season; (b) approximately linear increase of log numbers with fitted straight line for exponential growth and geometric rate of increase 2.66 per annum.

シラコバトのモデル

翌年の雌個体数

$$N_{t+1} = s_a N_t + \frac{1}{2} b s_b N_t = (s_a + \frac{1}{2} b s_b) N_t$$

雌成鳥生き残り

新規個体 =

性比 × 卵数 × 幼鳥生存率

直線の傾き

$\log r = 0.98$

毎年の増加率：

$e^{0.98} \sim 2.66$

$$N_{t+1} = r N_t$$

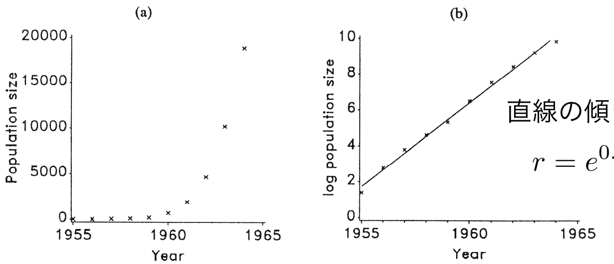
$r = s_a + \frac{1}{2} b s_b$ の指数変化

s_a：雌成鳥の生存率

s_b：雌幼鳥の生存率

b：1匹の雌が産む卵の数

パラメータ推定



直線の傾き $\log r = 0.98$

$$r = e^{0.98} = 2.66$$

Figure 1.6 Exponential growth in a population of collared doves. (a) Increase in the number of adults plus young at end of breeding season; (b) approximately linear increase of log numbers with fitted straight line for exponential growth and geometric rate of increase 2.66 per annum.

調査により

$$s_a = 0.86, s_b = 0.6, b = 4 \sim 6$$

$$r = 2.06 \sim 2.66$$