奈良女子大学　理学部　情報科学科

平成１０年度大域情報学レポート解説

１９９８年１０月１８日配布

平成１０年度大域情報学レポート問題の解説です。レポートは提出したけど自分の回答に不安がある、もしくはもっと勉強したいというガッツのある方は目を通しておいてください。正答率は平均してだいたい７割、といったところでした。

1

1. 翌年の個体数は、生き残った個体と新たに生まれた個体の和で与えられるから、

$$N_{t+1} = (s_A + s_E R/2) N_t$$

となる。これは指数的増加に他ならない。

2. パラメータ値を代入すると、$N_{t+1} = 2.7N_t$となり、個体数が１００倍に増加するのに要する時間 T_{100}は初期個体数を N_0として、

$$N_0 2.7^{T_{100}} = 100N_0$$

これを解いて、$T_{100} = log100/log2.7 = 4.64$ を得る。ここで、log は自然対数である。自然科学では通常、対数の logといえば、自然対数を意味する。１０を底とする常用対数ではないことに注意。この区別をはっきり付けるために自然対数を ln で表すこともある。

2

1. 個体数が単位時間毎に R倍に増加するモデルである。$R > 1$ であるから、このモデルでは個体数は無限大に発散し、現実的ではない。

2. 修正したモデル

$$N_{t+1} = \frac{R}{(1 + aN_t)^2} N_t = f(N_t)$$

では一固体が産む子供の数 $f(N_t)/N_t = R/(1 + aN_t)^2$ は集団サイズ N_tの増加に従いゼロに漸近する。従って、個体数が増加するにつれて、生息場所や餌の不足、排泄物の蓄積など負の効果によって集団の増加率が低下するので、先ほどのモデルよりも現実的であると思われる。もっとも、一個体当たりの子供の数が一般的にこのようなマイナス２乗の項（$R/(1 + aN_t)^2$）で表されるとは保証できない。これはあくまで**モデル**に他ならない。

3. Cobweb の方法については別紙参照。相平面上に、$N_{t+1} = f(N_t)$ 及び $N_{t+1} = N_t$を描く。平衡点は $N_{t+1} = N_t = N_E$であるから、式に代入して

$$N_E = 0, N_E = \frac{\sqrt{R} - 1}{a}$$

を得る。平衡点の局所安定性は $f'(N_E)$ を調べればよい。この値の絶対値が１未満であれば局所的に安定である。自明な平衡点 $N_E = 0$ については、$f'(N_E) = R > 1$ であり、常に局所的に不安定。自明でない平衡点 $N_E = (\sqrt{R} - 1)/a$ については、

$$f'(N_E) = \frac{2 - \sqrt{R}}{\sqrt{R}}$$

であるが、$R > 1$ の範囲では、$-1 < f'(N_E) < 1$ であるから、自明でない平衡点は常に局所的に安定である。ちなみに、$R = 4$ で $f'(N_E)$ の符号が切り替わる。従って、$4 < R$ では、振動しながら収束する。

3

この微分方程式は変数分離の方法で楽に解ける。

1. 変数を分離すると、

$$\frac{dL}{L_{max} - L} = kdt$$

両辺を積分して、

$$-log(L_{max} - L) = kt + c$$

これを変形して初期条件 $L(0) = 0$ を用いて積分定数 c を消去すると、

$$L(t) = L_{max}(1 - exp(-kt))$$

を得る。

関数形は、原点で直線的に立ち上がり（時刻 $t = 0$ での傾きが $L_{max}k$）、$t \to \infty$ で $L(t) \to L_{max}$ に漸近する上に凸の関数となる。概形を描けと言う問に対しては、すくなくとも、切片、切片での傾き、上に凸か下に凸か、そして、漸近する値、を押さえてグラフを描くこと。今求めた関数はＳ字曲線（変局点が存在する）ではない！

2. パラメーター値を代入して、$L(T) = L_{max}/2$ となる時刻 Tを求めればよい。

$$L(T) = L_{max}(1 - exp(-kT)) = L_{max}/2$$

より、$exp(-kT) = 1/2$。これを解いて、$T = log2/0.01 = 69.3$ days を得る。対数 logは自然対数である！時間の単位は日（day）。

3. 時刻 $T = 90$ days における体長 $L(90)$ が、最大体長の３／４以上になっていればよいから、

$$L(90) = L_{max}(1 - exp(-90k)) \geq \frac{3}{4}L_{max}$$

これを解くと、

$$exp(-90k) \leq \frac{1}{4}$$

従って、

$$k \geq log4/90 = 0.0154$$

となる。しつこいようだが対数は自然対数。

4

捕食者が不在の時、被捕食者の増加はロジスティック**ではない**ことに注意。

1. 別紙参照のこと。Hのヌルクラインは、$H = 0, P = r(1 - H/K)H/a$、Pのヌルクラインは、$P = 0, H = r_P/b$ である。

2. 平衡点 (H_E, P_E) は時間微分がゼロとなる点であり、３つ存在する。

$$(H_E, P_E) = (0, 0), (K, 0), (\frac{r_P}{b}, \frac{r}{a}(1 - \frac{r_P}{Kb})\frac{r_P}{b})$$

3. 平衡点の局所安定性は、平衡点におけるヤコビ行列（コミュニティ行列）の固有値で判定できる。非自明な平衡点 $(K, 0)$ におけるコミュニティ行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} -rK & -aK \\ 0 & kK - r_P \end{pmatrix}$$

となり、固有値は、$-rK$ と $bK - r_P$である。従って、$bK - r_P < 0$ の時、局所的に安定になる。

もう一つの非自明な平衡点について考える。パラメーター値を代入し、この平衡点が生物学的な意味を持つ（正の値）ためには、$0 \leq r_P \leq 10$ でなければならないことを念頭に置いておく。

コミュニティ行列 A は、

$$A = \begin{pmatrix} (1 - \frac{r_P}{5})r_P & -r_P \\ (1 - \frac{r_P}{10})r_P & 0 \end{pmatrix}$$

となり、固有値 λ は、

$$\lambda = \frac{r_P}{10}(5 - r_P \pm \sqrt{-75 + r_P^2})$$

となる。ここで、$0 < r_P < 5$ の時、固有値は複素数、かつ、$Re\lambda > 0$ となるので、局所的に不安定であることがわかる。$5 < r_P < 5\sqrt{3}$の時、固有値は複素数だが $Re\lambda < 0$ となって、安定（振動しながら収束）。$5\sqrt{3} < r_P < 10$ の時、固有値は実数になるが、共に負になるので、安定。以上、パラメーター r_Pに依存して局所安定性が変化することがわかったが、アイソクラインによる方法と対比させてみること。

4. 以上の解析から、$r_P < 5$ の時、局所的に安定な平衡点は存在しないことがわかった。実際に数値計算で解を求めてみると、解は発散しないで、安定な周期解に収束する（別紙参照)。このように、パラメーターの値を変化させて安定な平衡点が不安定に切り替わる場合、不安定な平衡点を取り囲む周期解が出現することがある。この解のことを Limit Cycle という。この周期解は中立安定の場合の周期解とは異なり、少しずらしても元の起動に戻る性質を持っている。詳しくは微分方程式の教科書を参照すること。