奈良女子大学　理学部　情報科学科

平成１１年度　大域情報学　試験問題の解説

１９９９年１１月５日配付

１０月１日に実施した試験の解説です。自分の回答に不安がある、もしくはもっと勉強したいという意欲のある学生は参考にしてください。

1

１変数の離散時間モデルである。この手のモデルの定性的な振る舞いは、１）Cob-Web の方法を用いてグラフで解析する、そして、２）平衡点の安定性を解析する、の２点に尽きる。どちらも講義でやったことなので、できてもらわないと困る。

1. 離散時間の指数増加であり単純な等比数列である。初期条件を用いると解は次の通り。

$$N_t = N_0 r^t$$

両辺の対数をとると、

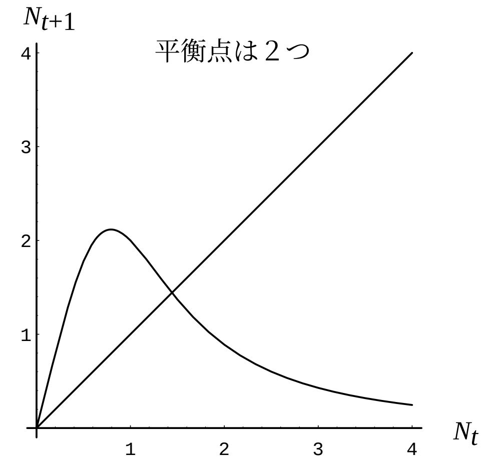
$$\log N_t = \log N_0 + \log r^t = \log N_0 + t \log r$$

$r > 1$ より $\log r > 0$、個体数の対数は時間 t に比例して増加することがわかる。

2. 増加率が個体数 N_tの増加とともに減少するモデルである。式は次の通り。

$$N_{t+1} = \frac{r}{1+N_t^3} N_t = f(N_t)$$

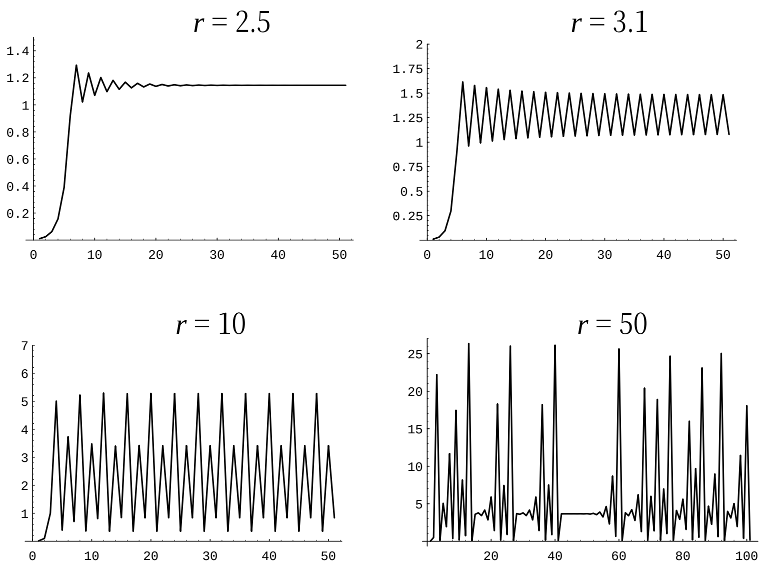
横軸を N_t、縦軸を N_{t+1}とした図を描くと下図のようになる。原点付近（$N_t << 1$）では傾き r（$r > 1$）の直線であり、$N_t >> 1$ ではゼロに漸近する上に凸の関数となる。したがって自明でない平衡点は必ず存在する。答案を見ていると、とんちんかんなグラフを描いた学生が多い。こういうグラフを描くときには最低でも、１）切片の位置、２）漸近する先、３）上に凸か下に凸か、の３点に注意を払ってグラフを描いて欲しいです。



平衡点 N_Eは $N_t = N_{t+1} = N_E$を満たす点であり、この場合、自明な平衡点 $N_E = 0$ と、自明でない平衡点 $N_E = (r-1)^{1/3}$の２つがある。非自明な平衡点の局所安定性は、そこにおける曲線 $N_{t+1} = f(N_t)$ の傾きで決まるのだった。上式の右辺を $f(N_t)$ とおくと、平衡点 N_Eにおける傾きは、

$$f'(N_E) = -2 + \frac{3}{r}$$

となる。この傾きの絶対値が１未満の時、平衡点は局所的に安定であったから、非自明な平衡点の安定性は、１）$1 < r < 3$ の時、局所的に安定、２）$3 < r$の時、不安定となる。rの値を変えたときの N_tの振る舞い（数値計算）を下図に示す。



初期値はいずれも $N_0 = 0.01$

離散時間のロジスティックモデルと同様に rの値が大きくなると、周期２、４、の周期２倍化（Period Doubling）が起こり、やがてカオス（らしきもの）が現れる。

2

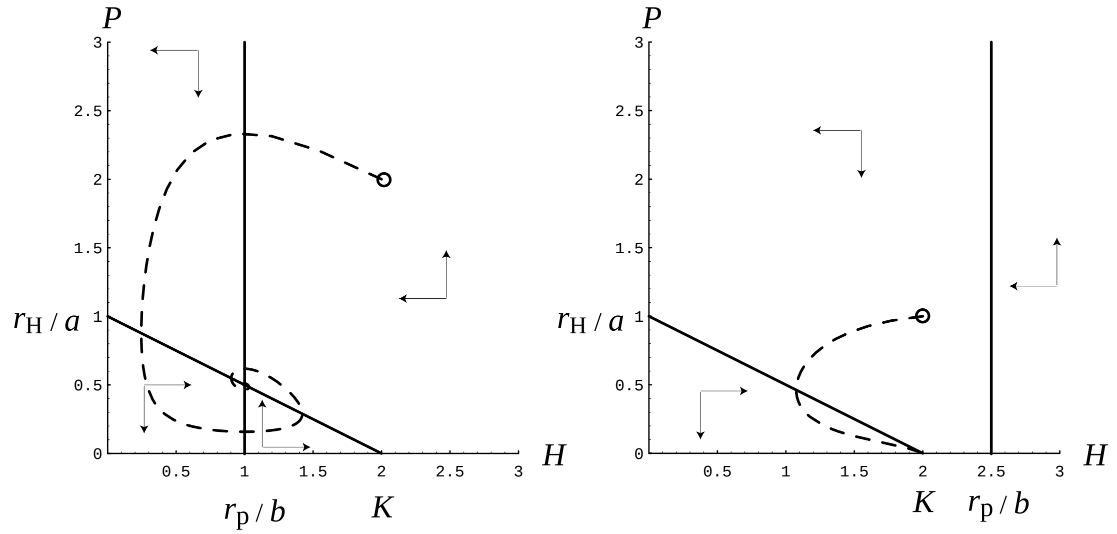
連続時間の２変数微分方程式で表されるモデルである。この手のモデルは、１）相平面上で時間変化がゼロとなるヌルクラインを描いて、軌道の流れの図を描き、２）平衡点の周りで線形近似して局所安定性を求める、の２点に尽きる。これも微分方程式の振る舞いを調べる際の常套手段であり、できてもらわないと困る。

1. 捕食者が存在しないとき、非捕食者 Hの時間変化は上式で $P=0$ とした次式に従う。

$$\frac{dH}{dt} = r_H(1-\frac{H}{K})H$$

ただし $H>0$ である。これはロジスティック増殖であるから、非捕食者密度 Hは環境収容量 K に収束する。この微分方程式をまじめに解いても Hは Kに収束することがわかる。

2. 時間変化がゼロとなるヌルクラインを相平面に描くと次の２通りが可能である。数値的に解いた軌道（点線）を重ねてみると、軌道の流れから予想されるように、パラメータの値によって定性的に異なる２つの場合に収束している。



3. 平衡点は３つ存在して、

$$(H_E, P_E) = (0,0), (K,0), (\frac{r_P}{b}, \frac{r_H}{a}(1-\frac{r_P}{Kb}))$$

である。ただし、最後の平衡点は $r_P/b < K$の時のみ生物学的な意味を持つ（負の密度はおかしいでしょ）。

平衡点の局所安定性はヤコビ行列 J

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H} & \frac{\partial f_1}{\partial P} \\ \frac{\partial f_2}{\partial H} & \frac{\partial f_2}{\partial P} \end{pmatrix}$$

を平衡点で評価したコミュニティ行列 A の固有値で決まるのだった。

自明な平衡点 $(0,0)$ に対しては、コミュニティ行列は

$$A = \begin{pmatrix} r_H & 0 \\ 0 & -r_P \end{pmatrix}$$

となり、不安定である（固有値は$\lambda = r_H > 0, -r_P < 0$ だから）。

平衡点 $(K,0)$ に関しては、

$$A = \begin{pmatrix} -r_H & -aK \\ 0 & bK - r_P \end{pmatrix}$$

となり、固有値は$\lambda = -r_H < 0, bK - r_P$となる。したがって、$K < r_P/b$ の時、固有値はともに負でこの平衡点は安定である。

最後の平衡点に関しては、$r_H = r_P = 1$ を用いるとコミュニティ行列は次の通り。

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{bK} & -\frac{a}{b} \\ \frac{bK-1}{aK} & 0 \end{pmatrix}$$

このコミュニティ行列の固有値は、

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4bK - 4b^2K^2}}{2bK}$$

となる。$bK > 1$ の時、すなわちこの平衡点が生物学的に意味を持つ場合、これらの固有値は、１）実数でともに負、もしくは、２）虚数で実部が負、のどちらかとなり、局所的に安定であることがわかる。逆に $1 > bK(> 0)$ の時（密度が負となり意味をなさない場合）、固有値はともに実数かつ正のものが１つ存在することから、不安定であることがわかる。このことは、横軸に bK、縦軸に分子の平方根の中身 $1 + 4bK - 4b^2K^2$ を描いてみればわかる（上に凸の放物線ね）。

以上、３つの平衡点についての局所安定性について解析ができた。局所安定性といえばコミュニティ行列の固有値と来るが、ここで大切なことは、固有値が実数であれ虚数であれ、安定であるためにはすべての固有値の実部が負であることが、平衡点の安定性の必要十分条件になっていることである。

固有値をまじめに解く場合、固有値が実数の場合と複素数の場合とわけて考える必要があるが、次の関係を覚えると簡単である。

行列、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

（a, b, c, d は実数）が安定（２つの固有値がともに負、もしくは虚数の場合に実部が負）であるための必要十分条件は、

$$T = a + d < 0 \text{ かつ } D = ad - bc > 0$$

である。

証明：まじめに固有値を計算して場合分けすればそうなる。