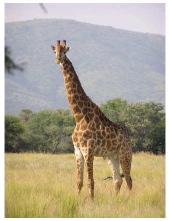
パターン形成のモデル

動物の表皮パターン

http://www.asazoo.jp/doubutu/zoostar/1simauma/simauma.html



http://ja.wikipedia.org/wiki/キリン

http://www.bio.nagoya-u.ac.jp/~z3/research/research_j.htm

表皮模様（パターン）は、発生段階の様々な機構により生じると考えられる

多数の物質と複雑な代謝機構が関係しないと生じない現象なのか？

1

化学反応におけるパターン形成

化学反応における振動

Belousov-Zhabotinskii Reaction (BZ)

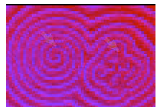
マロン酸の酸化反応　　$HBrO_2$, Br^-, Ce^{4+}, BrO_3^-, HOBr

各物質濃度が周期的な変動を示す現象

http://www.uni-regensburg.de/Fakultaeten/nat_Fak_IV/Organische_Chemie/Didaktik/Keusch/D-oscill-e.htm

BZ reaction in two-dimensional medium

2次元媒体上でリング・ラセン状
パターンを示す



http://people.musc.edu/~alievr/BZ/BZexplain.html

2

パターン形成の数理

単純なルールにより様々なパターン形成が可能

複数物質の反応と拡散がもたらすパターン

反応拡散方程式で記述されるパターン形成

物質 u, v がそれぞれ関数 f, g に従い反応すると同時に拡散するモデル

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v)$$

3

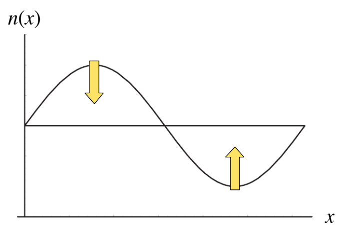
拡散の性質

拡散は、空間上の濃度変位を均す

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

濃度が高い（上に凸）--> 濃度減少

濃度が低い（下に凸）--> 濃度増加



境界上で物質の行き来が無い
反射条件下では、一様分布に収束

4

拡散不安定性

一様分布の不安定化：チューリングパターン Turing pattern

2 種類の物質 u, v の反応と拡散により
空間的に不均一なパターンが生じる

1) 一様解 u^*, v^* は線型安定

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u,v) \qquad \frac{du}{dt} = f(u,v)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u,v) \qquad \frac{dv}{dt} = g(u,v)$$

2) 拡散の働きにより一様解が不安定化し
不均一パターンが生じる

5

拡散不安定が起こる条件

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u,v)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u,v)$$

一様解からの摂動に関する線型近似

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u(t,x) - u^* \\ v(t,x) - v^* \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w} = A\mathbf{w} + D\nabla^2\mathbf{w} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

不安定周期解が出現する条件

$$\mathbf{w} = \sum_k c_k e^{\lambda t} \exp[ikx]$$

$f_u + g_v < 0$ and $f_u g_v - f_v g_u > 0$

$df_u + g_v > 0$ and

$(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u) > 0$

6

拡散不安定性の例1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u,v)$$

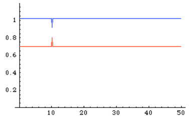
$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u,v)$$

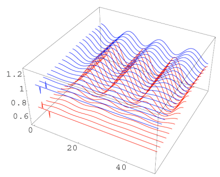
Schnakenberg kinetics:

$$f(u,v) = k_1 - k_2 u + k_3 u^2 v$$

$$g(u,v) = k_4 - k_3 u^2 v$$

1 次元空間上の拡散不安定





適当なパラメータを用いて安定一様解 u^*, v^* に摂動を加えると
周期的パターンが生じる

7

拡散不安定性の例2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u,v)$$

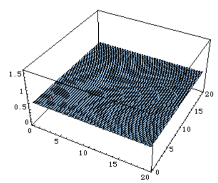
$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u,v)$$

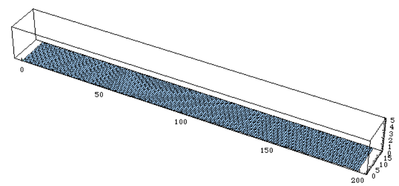
Schnakenberg kinetics:

$$f(u,v) = k_1 - k_2 u + k_3 u^2 v$$

$$g(u,v) = k_4 - k_3 u^2 v$$

2 次元空間上の拡散不安定





8

拡散不安定性は表皮パターンを説明できるか

拡散不安定性：2 種類の物質の反応＋拡散により非均一パターンが可能

単純なルールであってもパターンを産み出すことは可能

反応拡散モデルによる拡散不安定性と現実系との比較

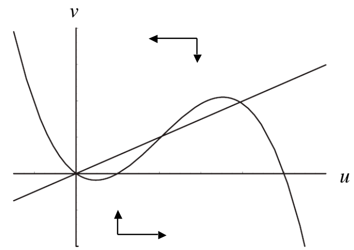
これらの因子に対応する物質が実在するのか？

9

双安定ダイナミクス＋拡散

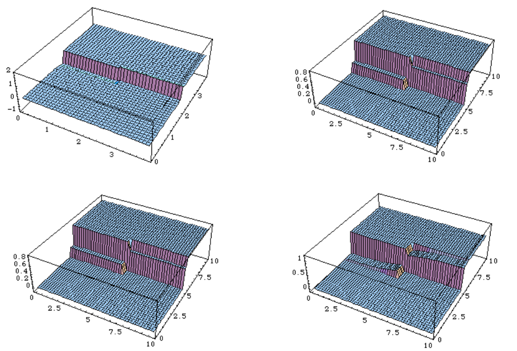
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u,v) \qquad f(u,v) = \frac{u(u-a)(1-u)-v}{\epsilon}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u,v) \qquad g(u,v) = u - \gamma v$$



10

例 1



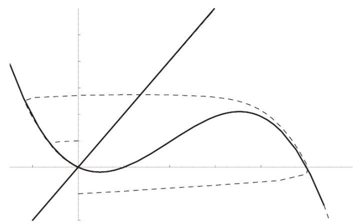
各パラメータ値、初期分布、領域サイズに依存して様々な非均一パターンが生じる

11

興奮性ダイナミクス＋拡散

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u,v) \qquad f(u,v) = \frac{u(u-a)(1-u)-v}{\epsilon}$$

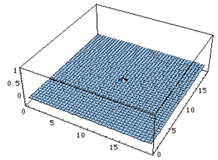
$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u,v) \qquad g(u,v) = u - \gamma v$$



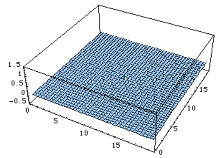
閾値を超える刺激により
解軌道が大きく周回する

12

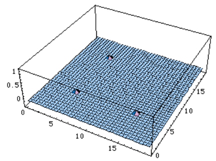
例 2



ディスク状平衡解



リング波



迷路模様

13

パターン形成の数理

反応拡散方程式による様々なパターン形成

自然界に見られる多種多様なパターン形成の仕組みを
統一的に理解する枠組みを提供

パターンをもたらす普遍的なメカニズムの解明

数学理論と計算機シミュレーションの融合

14