微分方程式

自然科学ではあらゆる分野で微分方程式が用いられる

その理由は、状態の時間変化（微分）を記述する法則の多くが、状態 x、時間 t、

$$\frac{dx}{dt},\quad \frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^3x}{dt^3}\cdots$$ の間の関係として定まるからである

重力による自由落下

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

摩擦力のあるバネの振動

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - cx$$

放射性元素の崩壊

$$\frac{dA}{dt} = -kA$$

常微分方程式

微分方程式の定義

変数 t とその関数 $x(t)$ と、その有限階の導関数についての関数

$$F(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0$$

$$x' = \frac{dx}{dt}\quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2}\quad x^{(n)} = \frac{d^nx}{dt^n}$$

を、$x(t)$ に関する微分方程式と呼ぶ。

導関数の最高階数 n をこの微分方程式の階数という
この式を満たす関数 $x(t)$ を、この微分方程式の解という

t を独立変数、$x(t)$ を従属変数と呼ぶこともある

独立変数の数が 1 つの時、偏微分方程式と区別するため常微分方程式と呼ぶ

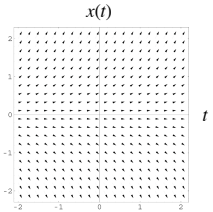
1 階常微分方程式

$F(t, x, x') = 0$　が x' について陽に解けている場合（正規型）

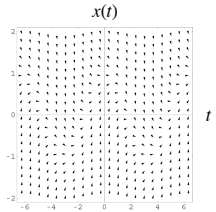
$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

幾何学的には、関数 $x(t)$ の勾配が $f(t, x)$ に等しいことを意味する。

$f(t, x) = x$



$f(t, x) = x + \cos t$



常微分方程式は一般に無数の解を持つ

解の存在

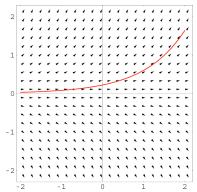
常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$
$$x(t_0) = x_0$$

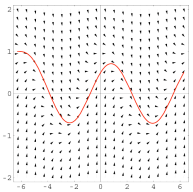
関数 $f(t, x)$ が Lipschitz 条件を満たすなら
初期値問題の解は一意に決まる

t に無関係な $K > 0$ が存在して次を満たす　$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \le K|x_1 - x_2|$

$f(t, x) = x$



$f(t, x) = x + \cos t$



常微分方程式の初等解法（求積法）

与えられた常微分方程式から、四則演算、微分・積分、関数の合成・逆関数などの組み合わせによって解を求める方法

1 階常微分方程式（正規型）の初等解法

変数分離型

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) = g(t)h(x) \qquad \frac{dx}{dt} = t(1-x^2)$$

同次型

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) = \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \qquad t\frac{dx}{dt} = x + \sqrt{t^2+x^2}$$

線形型

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) = p(t)x + q(t) \qquad \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{1+t} + \cos t$$

5

常微分方程式の数値解法

Lipschitz 条件により、初期値問題の解の存在が保証されていても、解析解を求めることは一般に困難（求積法で解ける場合もある）

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

その場合、初期値問題を数値的に解くしかない（数値解）

数値解法の基本的な考えは、連続量 t を差分化し、微分を差分式で置き換えるところにある（t の刻み幅 $h>0$ を設定し、差分化）

$$t \to t_n = t_0 + nh \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\frac{dx}{dt} \to \frac{x(t_n+h) - x(t_n)}{h}$$

6

オイラー法

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

⇓

$$\frac{x(t_n+h)-x(t_n)}{h} = f(t_n, x(t_n)) \Rightarrow x(t_{n+1}) = x(t_n+h) = x(t_n) + hf(t_n, x(t_n))$$

$x(t_n) = x_n$　と表記すると　$\boxed{x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)}$

初期値 x_0 を与えると、漸次 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ が決まる。

この方法をオイラー法 (Euler) という。

7

オイラー法の精度

テイラー展開により

$$x(t_{n+1}) = x(t_n+h) = x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{h^2}{2}x''(\xi) \quad t_n < \xi < t_{n+1}$$

よって t を h だけ進める際の誤差は、

$$x(t_{n+1}) - \{x_n + hf(t_n, x_n)\} = \frac{h^2}{2}x''(\xi) = O(h^2) \quad h \to 0$$

真の値　　オイラー法による値

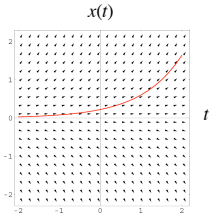
区間 $[\,t_0, t_0+T\,]$ を刻み幅 h で分割したとき、終端 t_0+T での誤差の累積は

$$O(h^2) \times \frac{T}{h} = O(h)$$

刻み幅 h を 1/10 にすれば累積誤差もだいたい 1/10 になる（計算量は 10 倍になる）

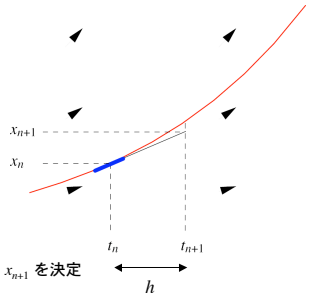
8

オイラー法の図解



$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$$



t_n における勾配 $f(t_n, x_n)$ のみを用いて x_{n+1} を決定

ルンゲ・クッタ法

オイラー法よりも精度が良く、かつ比較的簡単なルンゲ・クッタ法

Runge-Kutta の 1/6 公式（4 次のルンゲ・クッタ）

$$\begin{aligned} k_0 &= hf(t,x) \\ k_1 &= hf(t+\frac{1}{2}h, x+\frac{1}{2}k_0) \\ k_2 &= hf(t+\frac{1}{2}h, x+\frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(t+h, x+k_2) \\ x(t+h) &= x(t) + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \end{aligned}$$

誤差は $O(h^5)$

累積誤差は

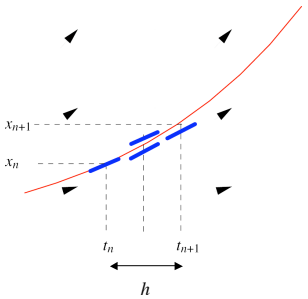
$$O(h^5) \times \frac{T}{h} = O(h^4)$$

ルンゲ・クッタ法の図解

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

$$\begin{aligned} k_0 &= hf(t,x) \\ k_1 &= hf(t+\frac{1}{2}h, x+\frac{1}{2}k_0) \\ k_2 &= hf(t+\frac{1}{2}h, x+\frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(t+h, x+k_2) \\ x(t+h) &= x(t) + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \end{aligned}$$

四ヶ所での勾配を用いて x_{n+1} を決定



多変数の常微分方程式

多変数 1 階常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_3(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

ベクトル表示

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{x}) \\ f_2(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

オイラー法

$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

ルンゲ・クッタ法

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_0 &= h\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \\ \mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(t+\frac{1}{2}h, \mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{k}_0) \\ \mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}(t+\frac{1}{2}h, \mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{k}_1) \\ \mathbf{k}_3 &= h\mathbf{f}(t+h, \mathbf{x}+\mathbf{k}_2) \\ \mathbf{x}(t+h) &= \mathbf{x}(t) + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_0 + 2\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \end{aligned}$$

プログラム例 （1 変数）

1) 関数およびパラメータ（刻み幅 h や初期値など）の設定

2) t を h だけ進めることを繰り返す

```
#define dt 0.01        /* 時間刻み幅 */
#define STEP_MAX 1000 /* 実時間 10.0 まで */
double fn(double, double); /* 導関数 */
void euler(double, double, double*, double);

main()
{
  long step;
  double t, x, x_next;

  x=0.1;   /* 初期値設定 */

  for(step=0; step<STEP_MAX; step++){
    t = step*dt;
    euler(t, x, &x_next, dt);
    x = x_next;
  }
}
```

1 変数の場合

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

$x(t+h)$ は、引数 x_next を介して返却（参照渡し）

関数 euler（1変数）

関数 euler を呼び出すと、独立変数 t が刻み幅 h だけ進むようにしたい。

関数に引数 t, $x(t)$, h を与えると、 $t+h$ の状態 $x(t+h)$ を引数を解して関数呼び出し元に返すものとする

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \quad \Rightarrow \quad x(t+h) = x(t) + hf(t,x(t))$$

現時刻　現状態　次ステップの状態　刻み幅

```
void euler(double t, double x, double *x_out, double h)
{
  /* t, x, h から t+h の状態を計算して x_out を介して返却 */
  double tmp;
  tmp = x + h*f(t, x);
  *x_out = tmp;
}

double f(double t, double x)
...
```


関数 euler（多変数）

関数 euler を呼び出すと、独立変数 t が刻み幅 h だけ進むようにしたい。

関数に引数 t, $\mathbf{x}(t)$, h を与えると、 $t+h$ の状態 $\mathbf{x}(t+h)$ を引数を解して関数呼び出し元に返すものとする

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t))$$

現時刻　現状態　次ステップの状態　次元　刻み幅

```
void euler(double t, double x[], double x_out[], int n,
                                                 double h)
{
  /* t, x[], n, h から t+h の状態を計算して x_out[] を介して返却 */
  /* n 個の導関数の値を求める必要がある */
}

void derivs(double t, double x[], double derivatives[], int n)
{
  ...
}
```


多変数の導関数の計算

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t,\mathbf{x}) \\ f_2(t,\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t,\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

n 個の導関数の値を引数を介して返す関数を定義して用いる。

時刻　状態　導関数の値　次元

```
void derivs(double t, double x[], double derivatives[], int n)
{
  /* t, x[], n から導関数を計算して derivatives[] を介して返却 */
}
```

関数 euler (多変数）の骨子

```
#define DIM    2   /* 次元（変数の数）の設定 */

main()
{
  ...
}

void euler(double t, double x[], double x_out[], int n, double h)
{
  int i;
  double x_tmp[DIM], derivatives[DIM];

  derivs(t, x, derivatives, n);  /* 導関数の値を求める */

  for(i=0; i<DIM; i++)           /* Euler 法 */
    x_tmp[i] =

  for(i=0; i<DIM; i++)
    x_out[i] = x_tmp[i];         /* 引数を介して演算結果を返却 */
}
```

17

Euler 法プログラム例（多変数）

```
#define DIM 2          /* 次元 */
#define dt 0.01        /* 時間刻み幅 */
#define STEP_MAX 1000 /* 実時間 10.0 まで */
void fn(double, double[], double[], int);
void euler(double, double[], double[], double);

main()
{
  long step;
  double t, x[DIM], x_next[DIM];

  x[0]=0.1;   /* 初期値設定 */
  x[1]=0.2;
  for(step=0; step<STEP_MAX; step++){
    t = step*dt;
    euler(t, x, x_next, dt);
    x[0] = x_next[0];
    x[1] = x_next[1];
  }
}
...
```

18

関数 runge_kutta（多変数）

関数 runge_kutta を呼び出すと、独立変数 t が刻み幅 h だけ進むようにしたい。

n 変数の常微分方程式をルンゲ・クッタ法で解く関数を作る。

関数には引数 t, $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, h を与え、$t+h$ の状態 $(x_1(t+h), x_2(t+h), ..., x_n(t+h))$ は、引数を介して関数呼び出し元に返す。

現時刻　現状態　次ステップの状態　次元　刻み幅

```
void runge_kutta(double t, double x[], double x_out[],
                                          int n, double h)
{
  /* t, x[], n, h から t+h の状態を計算して x_out[] を介して返却 */
  ...
}
```

19

数値解の視覚化

1) 計算結果を以下の形式でデータファイルに保存（C プログラミング）

t　$x(t)$

```
0.000 1.00
0.001 1.02
0.002 1.05
...
```

スペースで区切る

$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$　1 変数の場合

2) Mathematica によるデータの読み込みと視覚化

Mathematica の起動はターミナルから　% /usr/local/bin/mathematica &

データファイルがあるディレクトリを SetDirectory コマンドで指定

SetDirectory[“~/keisanki2004/”]

Mathematica は大文字と小文字を区別するので注意！

~ はホームディレクトリ＝

20

続き

データファイルの読み込み

```
data = ReadList[ "data_file",  {Real, Real}]
```

ReadList コマンドを用いて、ファイル名 data_file のファイルから
(x 座標, y 座標) の対でデータを数値として読み込む。読み込んだもの
（リスト）に data という名前を付ける

データをグラフに描く

```
ListPlot[ data, PlotJoined->True, PlotRange->All ]
```

(x 座標, y 座標) の形式のデータをグラフとして描く
PlotJoined->True はデータ各点を結ぶオプション
PlotRange->All はグラフの範囲（縦軸）はすべての範囲とするオプション

PlotRange->{0,10} とすると、縦軸の範囲が 0 から 10 となる

2 変数常微分方程式の視覚化

1) 計算結果を以下の形式でデータファイルに保存

t　$x_1(t)$　$x_2(t)$

```
0.000 1.00 2.00
0.001 1.02 1.97
0.002 1.05 1.94
...
```

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2) \\ f_2(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

スペースで区切る

2) データファイルの読み込み

```
data = ReadList[ "data_file",  {Real, Real, Real} ] ;
```

ファイル data_file から (t, x_1, x_2) を対として数値データを読み込む
読み込んだものに data という名前を付ける

コマンドの最後にセミコロン ; を付けると実行結果を出力しない

続き

data は $\{\{t_0, x_0, y_0\}, \{t_1, x_1, y_1\}, \{t_2, x_2, y_2\}, \ldots\}$ という形式になっている

Transpose（転置）コマンドにより、data の成分を転置したものを dataT とする

```
dataT = Transpose[data];
```

これにより dataT は $\{\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}, \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}, \{y_0, y_1, y_2, \ldots\}\}$ となる

dataT の第 1 成分と第 2 成分を組み合わせて転地し、
新たに($t, x(t)$) のデータ dataX とする

```
dataX = Transpose[ {dataT[[1]], dataT[[2]] } ];
```

同様にして ($t, y(t)$) のデータ dataY 、($x(t), y(t)$) のデータ dataXY をつくる

```
dataY = Transpose[ {dataT[[1]], dataT[[3]] } ];
```

```
dataXY = Transpose[ {dataT[[2]], dataT[[3]] } ];
```


続き

時系列データをグラフに描くコマンド ListPlot を用いて、横軸を時刻 t 、縦軸を
それぞれ $x(t)$, $y(t)$ としたグラフを描き、名前を付ける

```
gx = ListPlot[ dataX, PlotJoined->True, PlotRange->All]
```

```
gy = ListPlot[ dataY, PlotJoined->True, PlotRange->All]
```

2 つのグラフを Show コマンドで重ね合わせて表示

```
Show[ gx, gy ]
```

横軸を $x(t)$, 縦軸を $y(t)$ としたグラフ（相平面上の解の軌道）を描く

```
ListPlot[ dataXY, PlotJoined->True, PlotRange->All]
```

3 変数常微分方程式の視覚化

1) 計算結果を以下の形式でデータファイルに保存

t　$x(t)$　$y(t)$　$z(t)$

```
0.000 1.00 2.00 3.00
0.001 1.02 1.97 3.03
0.002 1.05 1.94 3.08
...
```

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, x_3) \\ f_2(t, x_1, x_2, x_3) \\ f_3(t, x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

スペースで区切る

2) データファイルの読み込み

```
data = ReadList[ "data_file",  {Real, Real, Real, Real} ];
```

ファイル data_file から ReadList コマンドを用いて(t, x, y, z) を対として
数値データを読み込む
読み込んだものに data という名前を付ける

25

続き

data = {{t_0, x_0, y_0,z_0}, {t_1, x_1, y_1 ,z_1}, {t_2, x_2, y_2 ,z_2}, ... } という形式になっている

Transpose コマンドにより、data の成分を転置したものを dataT とする

```
dataT = Transpose[data];
```

これにより dataT = {{t_0, t_1, t_2, ... }, {x_0, x_1, x_2, ... }, {y_0, y_1, y_2, ...}, {z_0, z_1, z_2, ...}}

dataT の第 1 成分と第 2 成分を抜き出し、新たに dataX とする

```
dataX = Transpose[ {dataT[[1]], dataT[[2]] } ];
```

同様にして (t, $y(t)$) のデータ dataY 、 (t, $z(t)$) のデータ dataZ 、および
($x(t)$, $y(t)$, z(t)) のデータ dataXYZ を作る

```
dataY = Transpose[ {dataT[[1]], dataT[[3]] } ];
dataZ = Transpose[ {dataT[[1]], dataT[[4]] } ];
dataXYZ = Transpose[ {dataT[[2]], dataT[[3]], dataT[[4]] } ];
```

26

続き

横軸を時刻 t 、縦軸を $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ としたグラフを描く。

```
gx = ListPlot[ dataX, PlotJoined->True, PlotRange->All]
gy = ListPlot[ dataY, PlotJoined->True, PlotRange->All]
gz = ListPlot[ dataZ, PlotJoined->True, PlotRange->All]
```

3 つのグラフを重ね合わせて表示

```
Show[gx, gy, gz]
```

3 次元空間の軸をそれぞれ $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ としたグラフ（相空間内の解軌道）
を描くには、3 次元グラフパッケージをあらかじめ読み込んでおく

```
<<Graphics`Graphics3D`
```

```
ScatterPlot3D[dataXYZ, BoxRatios->{1,1,1}, ViewPoint->{0.810, -2.475, 2.160}]
```

オプション ViewPoint は視点を指定（省略可）

27

Mathematica による数値解

Mathematica を用いて常微分方程式を数値的に解くことができる。C プログラミングによる結果と比較してみるとよいだろう

```
deq = { x'[t] == (1 - x[t])x[t], x[0] == 0.01}
```

Mathematica では等式は == であることに注意

右の初期値問題を deq として定義。

$$\frac{dx}{dt} = (1 - x)x$$
$$x(0) = 0.01$$

```
sol = NDSolve[ deq, x[t], {t, 0, 10}]
```

初期値問題 deq を 区間 $0 \le t \le 10$ で数値的に解き、sol と名付ける。

```
Plot[ Evaluate[ x[t]/.sol ] , {t, 0, 10}]
```

数値的に解いた結果を t の関数として描く。
/. は右辺のルールを左辺に代入することを表す

```
x[t]/.sol/.t->5
```

$x(5)$ を数値的に求める。

28

例（続き）

```
deq2 = { x1'[t] == –x2[t] – x1[t]^2, x2'[t] == 2 x1[t] – x2[t], x1[0] == x2[0] == 1}
```

右の初期値問題を deq2 として定義

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_1^2 \quad x_1(0) = 1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 \quad x_2(0) = 1$$

```
sol2 = NDSolve[ deq2, {x1[t], x2[t]}, {t, 0, 20}]
```

区間 $0 \le t \le 20$ で数値的に解く

```
Plot[ Evaluate[ x1[t]/.sol2 ], {t, 0, 20}]
```

横軸を t としたグラフを描く

```
Plot[ Evaluate[ x2[t]/.sol2 ], {t, 0, 20}]
```

```
ParametricPlot[ Evaluate[ {x1[t], x2[t]}/.sol2 ], {t, 0, 20}]
```

相平面上の解軌道 ($x_1(t)$, $x_2(t)$) を描く

29

問題 1

次の常微分方程式の初期値問題を刻み幅 $h = 0.1$ 及び $h = 0.05$ のオイラー法で解き、解析解（自分で求めよ）と比較せよ。比較は下記の形式で出力すること。

$$\frac{dx}{dt} = x \quad 0 \le t \le 1$$
$$x(0) = 1$$

	数値解		解析解	誤差
n	t_n	x_n	$\exp t_n$	$x_n - \exp t_n$
0	0.0	1.0	1.0	0.0
1	?	?	?	?
2	?	?	?	?

$$\frac{dx}{dt} = -tx + t^3 \quad 0 \le t \le 1$$
$$x(0) = 1$$

	数値解		解析解	誤差
n	t_n	x_n	Exact solution	Error
0	0.0	1.0	1.0	0.0
1	?	?	?	?
2	?	?	?	?

刻み幅 h を半分にすると解の精度はどの程度改善するか確認せよ

30

問題 2

次の常微分方程式の初期値問題を刻み幅 $h = 0.1$ 及び $h = 0.05$ のルンゲ・クッタ法で解き、解析解と比較せよ。比較は下記の形式で出力すること。

$$\frac{dx}{dt} = x \quad 0 \le t \le 1$$
$$x(0) = 1$$

	数値解		解析解	誤差
n	t_n	x_n	$\exp t_n$	$x_n - \exp t_n$
0	0.0	1.0	1.0	0.0
1	?	?	?	?
2	?	?	?	?

$$\frac{dx}{dt} = -tx + t^3 \quad 0 \le t \le 1$$
$$x(0) = 1$$

	数値解		解析解	誤差
n	t_n	x_n	Exact solution	Error
0	0.0	1.0	1.0	0.0
1	?	?	?	?
2	?	?	?	?

刻み幅 h を半分にすると解の精度はどの程度改善するか確認せよ

31

問題 3

次の常微分方程式を Runge-Kutta 法で数値的に解き視覚化せよ

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - \frac{x}{K})x$$

パラメータ r, K および初期値 x_0 は適当な値（正）

連続時間のロジスティックモデル

ロジスティックモデルは解析的に解ける
数値解と解析解の誤差の評価を行え

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\epsilon}(x_2 - \frac{1}{3}x_1^3 + x_1) \qquad \varepsilon > 0$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1$$

van der Pol の振動子

$\varepsilon = 1.0,\ 0.5, 0.1$ とすると解の振る舞いはどうなるか調べよ（初期値は適当）

横軸を t, 縦軸を x_1 と x_2 としたグラフと、
横軸を $x_1(t)$, 縦軸を $x_2(t)$ とした相平面上の解軌道の二つのグラフを描け

32

問題 4

次の常微分方程式を Runge-Kutta 法を用いて数値的に解いて視覚化せよ

$$\frac{dx_1}{dt} = a(x_2 - x_1)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 x_3 + b x_1 - x_2$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 x_2 - c x_3$$

ただし、$a = 10$, $b = 28$, $c = 8.0/3$

初期値は $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0)$ とする。

Lorenz 方程式と呼ばれ流体のダイナミクスを記述するモデルとして知られる

Lorenz、カオス、というキーワードで WEB 検索し、解の振る舞いについて調べよ。また初期値をわずかにずらすと解軌道がどうなるか比較せよ。

33

問題 5

次の常微分方程式を Runge-Kutta 法を用いて数値的に解いて視覚化せよ

$$\frac{dx}{dt} = y - y^3$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + x^3$$

なお、初期値 $x(0)$, $y(0)$ をさまざまな値に設定したとき、解が相平面上でどのような軌道を描くか調べて比較せよ。

この常微分方程式の解 ($x(t)$, $y(t)$) は常に次の条件を満たすことを示せ。

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 = C$$

C は初期値で決まる定数

数値的に解いた相平面上の解軌道と関数 $\phi(x, y)$ の等高線の関係について述べよ。

Mathematica で　ContourPlot[y^2/2 – y^4/4 + x^2/2 – x^4/4, {x, –2, 2},{y, –2, 2}]

とすると関数 $\phi(x, y)$ の等高線が描ける

34

グラフを LaTeX に貼り込む方法

Mathematica で描いたグラフを EPS 形式でファイルに保存。(EPS: Encapsulated PostScript)

保存したいグラフを選択して、Mathematica のメニューから、
Edit ---> Save Selection As ---> EPS

LaTeX ドキュメントのプリアンブルに下を追加。

```
\usepackage{graphicx}
```

EPS グラフ graph.eps を取り込む

```
\includegraphics{graph.eps}
```

図を中央そろえ、横幅 5cm に縮小拡大して表示する場合

```
\begin{cetner}
\includegraphics[width = 5cm]{graph.eps}
\end{center}
```

35