微分方程式

自然科学のあらゆる分野で使われる微分方程式

なぜなら、状態の時間変化（微分）を記述する法則の多くが、状態 x、時間 t、

$$\frac{dx}{dt},\quad \frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^3x}{dt^3}\cdots$$ の間の関係として定まるから。

重力による自由落下

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

摩擦力のあるバネの振動

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - cx$$

放射性元素の崩壊

$$\frac{dA}{dt} = -kA$$

常微分方程式

微分方程式の定義

変数 t とその関数 $x(t)$ と、その有限階の導関数についての関数

$$F(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0 \qquad x' = \frac{dx}{dt}\quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2}\quad x^{(n)} = \frac{d^nx}{dt^n}$$

を、$x(t)$ に関する微分方程式と呼ぶ。

導関数の最高階数 n をこの微分方程式の階数という。
この式を満たす関数 $x(t)$ を、この微分方程式の解という。

t を独立変数、$x(t)$ を従属変数と呼ぶこともある。

独立変数の数が 1 つの時、偏微分方程式と区別するため常微分方程式と呼ぶ。

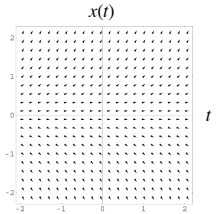
1 階常微分方程式

$F(t, x, x') = 0$　が x' について陽に解けている場合（正規型）

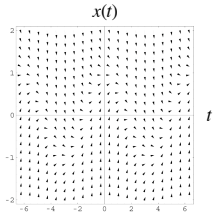
$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

幾何学的には、関数 $x(t)$ の勾配が $f(t, x)$ に等しいことを意味する。

$f(t, x) = x$



$f(t, x) = x + \cos t$



常微分方程式は一般に無数の解を持つ。

解の存在

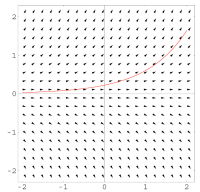
常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$
$$x(t_0) = x_0$$

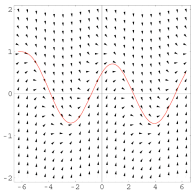
関数 $f(t, x)$ が Lipschitz 条件を満たすなら
初期値問題の解は一意に決まる。

t に無関係な $K > 0$ が存在して次を満たす　$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \le K|x_1 - x_2|$

$f(t, x) = x$



$f(t, x) = x + \cos t$



常微分方程式の初等解法（求積法）

与えられた常微分方程式から、四則演算、微分・積分、関数の合成・逆関数などの組み合わせによって解を求める方法。

1 階常微分方程式（正規型）の初等解法

変数分離型

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) = g(t)h(x) \qquad \frac{dx}{dt} = t(1-x^2)$$

同次型

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) = \varphi(\frac{x}{t}) \qquad t\frac{dx}{dt} = x + \sqrt{t^2+x^2}$$

線形型

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) = p(t)x + q(t) \qquad \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{1+t} + \cos t$$

5

常微分方程式の数値解法

Lipschitz 条件により、初期値問題の解の存在が保証されていても、解析解を求めることは一般に困難（求積法で解ける場合もある）

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

その場合、初期値問題を数値的に解くしかない（数値解）

数値解法の基本的な考えは、連続量 t を差分化し、微分を差分式で置き換えることにある（t の刻み幅 $h>0$ を設定し、差分化）。

$$t \to t_n = t_0 + nh \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\frac{dx}{dt} \to \frac{x(t_n+h) - x(t_n)}{h}$$

6

オイラー法

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

⇓

$$\frac{x(t_n+h)-x(t_n)}{h} = f(t_n, x(t_n)) \Rightarrow x(t_{n+1}) = x(t_n+h) = x(t_n) + hf(t_n, x(t_n))$$

$x(t_n) = x_n$ と表記すると　$\boxed{x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)}$

初期値 x_0 を与えると、漸次 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ が決まる。

この方法をオイラー法 (Euler) という。

7

オイラー法の精度

テイラー展開により

$$x(t_{n+1}) = x(t_n+h) = x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{h^2}{2}x''(\xi) \quad t_n < \xi < t_{n+1}$$

よって t を h だけ進める際の誤差は、

$$x_{n+1} - \{x_n + hf(t_n, x_n)\} = \frac{h^2}{2}x''(\xi) = O(h^2) \quad h \to 0$$

真の値　オイラー法による値

しかし、区間 $[\,t_0, t_0+T\,]$ を刻み幅 h で分割したとき、終端 t_0+T での誤差の累積は

$$O(h^2) \times \frac{T}{h} = O(h)$$

刻み幅 h を 1/10 にすれば累積誤差もだいたい 1/10 になる（計算量は 10 倍になる）

8

ルンゲ・クッタ法

オイラー法よりも精度が良く、かつ比較的簡単なルンゲ・クッタ法

Runge-Kutta の 1/6 公式（4 次のルンゲ・クッタ）

$$
\begin{aligned}
k_0 &= hf(t,x) \\
k_1 &= hf(t+\frac{1}{2}h, x+\frac{1}{2}k_0) \\
k_2 &= hf(t+\frac{1}{2}h, x+\frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= hf(t+h, x+k_2) \\
x(t+h) &= x(t)+\frac{1}{6}(k_0+2k_1+2k_2+k_3)
\end{aligned}
$$

誤差は $O(h^5)$

累積誤差は

$$O(h^5)\times\frac{T}{h}=O(h^4)$$

9

多変数常微分方程式

多変数 1 階常微分方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t,x_1,x_2,\cdots,x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(t,x_1,x_2,\cdots,x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_3(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)
\end{aligned}
$$

ベクトル表示

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{x})=\begin{pmatrix} f_1(t,\mathbf{x}) \\ f_2(t,\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t,\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

オイラー法

$$\mathbf{x}(t+h)=\mathbf{x}(t)+h\mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t))$$

ルンゲ・クッタ法

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k}_0 &= h\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \\
\mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(t+\frac{1}{2}h, \mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{k}_0) \\
\mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}(t+\frac{1}{2}h, \mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{k}_1) \\
\mathbf{k}_3 &= h\mathbf{f}(t+h, \mathbf{x}+\mathbf{k}_2) \\
\mathbf{x}(t+h) &= \mathbf{x}(t)+\frac{1}{6}(\mathbf{k}_0+2\mathbf{k}_1+2\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)
\end{aligned}
$$

10

プログラム例

1) 関数およびパラメータ（刻み幅 h や初期値など）の設定

2) t を h だけ進めることを繰り返す

```
#define dt 0.01        /* 時間刻み幅 */
#define STEP_MAX 1000 /* 実時間 10.0 まで */
double fn(double, double); /* 導関数 */
void euler(double, double, double*, double);

main()
{
  long step;
  double t, x, x_next;

  x=0.1;   /* 初期値設定 */

  for(step=0; step<STEP_MAX; step++){
    t = step*dt;
    euler(t, x, &x_next, dt);
    x = x_next;
  }
}
```

1 変数の場合

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$$

$x(t+h)$ は、引数 x_next を介して返却（参照渡し）

11

関数 euler

関数 euler を呼び出すと、独立変数 t が刻み幅 h だけ進むようにしたい。

一般に n 変数の常微分方程式をオイラー法で解くことを想定するので、
関数に与える引数は t, ($x_0(t), x_1(t), ..., x_n(t)$), h とする。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x}(t+h)=\mathbf{x}(t)+h\mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t))$$

$t+h$ の状態 ($x_0(t+h), x_1(t+h), ..., x_n(t+h)$) を引数を介して関数呼び出し元に返す。

現時刻　現状態　次ステップの状態　次元　刻み幅

```
void euler(double t, double x[], double x_out[], int n,
                                                 double h)
{
  /* t, x[], n, h から t+h の状態を計算して x_out[] を介して返却 */
  /* n 個の導関数の値を求める必要がある */
}
```

12

多変数の導関数

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{x}) \\ f_2(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

n 個の導関数の値を引数を介して返す関数を定義して用いる。

時刻　状態　導関数の値　次元

```
void derivs(double t, double x[], derivatives[], int n)
{
  /* t, x[], n から導関数を計算して derivatives[] で返却 */
}
```

13

オイラー法プログラム骨子

```
#define DIM    2   /* 次元（変数の数）の設定 */

main()
{
  ...
}

void euler(double t, double x[], double x_out[], int n, double h)
{
  int i;
  double x_tmp[DIM], derivatives[DIM];

  derivs(t, x, derivatives, n);  /* 導関数の値を求める */

  for(i=0; i<DIM; i++)           /* Euler 法 */
    x_tmp[i] = 自 分 で 考 え る

  for(i=0; i<DIM; i++)
    x_out[i] = x_tmp[i];         /* 引数を介して演算結果を返却 */
}
```

14

関数 runge_kutta

関数 runge_kutta を呼び出すと、独立変数 t が刻み幅 h だけ進むようにしたい。

n 変数の常微分方程式をルンゲ・クッタ法で解く関数を作る。
関数に与える引数は t, ($x_0(t), x_1(t), ..., x_n(t)$), h である。

$t + h$ の状態 ($x_0(t+h), x_1(t+h), ..., x_n(t+h)$) を引数を介して関数呼び出し元に返す。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{k}_0 &= h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(t + \tfrac{1}{2}h, \mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{k}_0) \\ \mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}(t + \tfrac{1}{2}h, \mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{k}_1) \\ \mathbf{k}_3 &= h\mathbf{f}(t + h, \mathbf{x} + \mathbf{k}_2) \\ \mathbf{x}(t + h) &= \mathbf{x}(t) + \tfrac{1}{6}(\mathbf{k}_0 + 2\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \end{aligned}$$

現時刻　現状態　次ステップの状態　次元　刻み幅

```
void runge_kutta(double t, double x[], double x_out[],
                                          int n, double h)
{
  /* t, x[], n, h から t+h の状態を計算して x_out[] を介して返却 */
}
```

15

数値解の視覚化

1) 計算結果を以下の形式でデータファイルに保存（C プログラミング）

t　$x(t)$

```
0.000 1.00
0.001 1.02
0.002 1.05
...
```

スペースで区切る

$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$　1 変数常微分の場合

2) Mathematica によるデータの読み込みと視覚化

Mathematica の起動はターミナルから　% /usr/local/bin/mathematica &

データファイルがあるディレクトリを SetDirectory コマンドで指定

SetDirectory[“~/keisanki2003/”]

Mathematica は大文字と小文字を区別するので注意！

~ はホームディレクトリです。

16

続き

データファイルの読み込み

```
data = ReadList[ "data_file", {Real, Real}]
```

ReadList コマンドを用いて、ファイル名 data_file のファイルから
(x 座標, y 座標) の対でデータを数値として読み込む。読み込んだものに
data という名前を付ける。

データをグラフに描く

```
ListPlot[ data, PlotJoined->True, PlotRange->All ]
```

(x 座標, y 座標) の形式のデータをグラフとして描く。
PlotJoined->True はデータ各点を結ぶオプション。
PlotRange->All はグラフの範囲（縦軸）はすべての範囲とするオプション。

PlotRange->{0,10} とすると、縦軸の範囲が 0 から 10 となる。

2 変数常微分方程式の視覚化

1) 計算結果を以下の形式でデータファイルに保存

t　$x_1(t)$　$x_2(t)$

```
0.000 1.00 2.00
0.001 1.02 1.97
0.002 1.05 1.94
...
```

スペースで区切る

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2) \\ f_2(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

2) データファイルの読み込み

```
data = ReadList[ "data_file", {Real, Real, Real}] ;
```

ファイル data_file から (t, x_1, x_2) を対として数値データを読み込む。
読み込んだものに data という名前を付ける。

コマンドの最後にセミコロン ; を付けると実行結果を出力しない。

続き

data = $\{\{t_0, x_0, y_0\}, \{t_1, x_1, y_1\}, \{t_2, x_2, y_2\}, \ldots\}$ という形式になっている。

Transpose コマンドにより、data の成分を転置したものを dataT とする。

```
dataT = Transpose[data];
```

これにより dataT = $\{\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}, \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}, \{y_0, y_1, y_2, \ldots\}\}$ となる。

dataT の第一成分と第二成分を組み合わせて転地し、
新たに($t, x(t)$) のデータ dataX とする。

```
dataX = Transpose[ {dataT[[1]], dataT[[2]] } ];
```

同様にして ($t, y(t)$) のデータ dataY 、($x(t), y(t)$) のデータ dataXY をつくる。

```
dataY = Transpose[ {dataT[[1]], dataT[[3]] } ];
```

```
dataXY = Transpose[ {dataT[[2]], dataT[[3]] } ];
```


続き

時系列データをグラフに描くコマンド ListPlot を用いて、横軸を時刻 t 、縦軸を
それぞれ $x(t)$, $y(t)$ としたグラフを描き、名前を付ける。

```
gx = ListPlot[ dataX, PlotJoined->True, PlotRange->All]
```

```
gy = ListPlot[ dataY, PlotJoined->True, PlotRange->All]
```

2 つのグラフを重ね合わせて表示

```
Show[gx, gy]
```

横軸を $x(t)$, 縦軸を $y(t)$ としたグラフ（相平面上の解の軌道）を描く。

```
ListPlot[ dataXY, PlotJoined->True, PlotRange->All]
```

3 変数常微分方程式の視覚化

1) 計算結果を以下の形式でデータファイルに保存

```
t      x(t)   y(t)   z(t)
0.000 1.00 2.00 3.00
0.001 1.02 1.97 3.03
0.002 1.05 1.94 3.08
...
```

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, x_3) \\ f_2(t, x_1, x_2, x_3) \\ f_3(t, x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

スペースで区切る

2) データファイルの読み込み

```
data = ReadList[ "data_file", {Real, Real, Real, Real}];
```

ファイル data_file から ReadList コマンドを用いて(t, x, y, z) を対として数値データを読み込む。読み込んだものに data という名前を付ける。

21

続き

data = $\{\{t_0, x_0, y_0, z_0\}, \{t_1, x_1, y_1, z_1\}, \{t_2, x_2, y_2, z_2\}, \ldots\}$ という形式になっている。

Transpose コマンドにより、data の成分を転置したものを dataT とする。

```
dataT = Transpose[data];
```

これにより dataT = $\{\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}, \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}, \{y_0, y_1, y_2, \ldots\}, \{z_0, z_1, z_2, \ldots\}\}$

dataT の第一成分と第二成分を抜き出し、新たに dataX とする。

```
dataX = Transpose[ {dataT[[1]], dataT[[2]] } ];
```

同様にして $(t, y(t))$ のデータ dataY 、 $(t, z(t))$ のデータ dataZ 、および $(x(t), y(t), z(t))$ のデータ dataXYZ を作る。

```
dataY = Transpose[ {dataT[[1]], dataT[[3]] } ];
dataZ = Transpose[ {dataT[[1]], dataT[[4]] } ];
dataXYZ = Transpose[ {dataT[[2]], dataT[[3]], dataT[[4]] } ];
```

22

続き

横軸を時刻 t 、縦軸を $x(t), y(t), z(t)$ としたグラフを描く。

```
gx = ListPlot[ dataX, PlotJoined->True, PlotRange->All]
gy = ListPlot[ dataY, PlotJoined->True, PlotRange->All]
gz = ListPlot[ dataZ, PlotJoined->True, PlotRange->All]
```

3 つのグラフを重ね合わせて表示

```
Show[gx, gy, gz]
```

3 次元空間の軸をそれぞれ $x(t), y(t), z(t)$ としたグラフ（相空間内の解軌道）を描く。

3 次元グラフパッケージを読み込んでおく `<<Graphics`Graphics3D``

```
ScatterPlot3D[data, BoxRatios->{1,1,1}, ViewPoint->{0.810, -2.475, 2.160}]
```

オプション ViewPoint は視点を指定（なくても良い）

23

問題 1

次の常微分方程式の初期値問題を、刻み幅 $h = 0.1$ 及び $h = 0.05$ のオイラー法で数値的に解き、解析解と比較せよ。比較は下記の形式で出力すること。

$$\frac{dx}{dt} = x \quad 0 \le t \le 1$$

$$x(0) = 1$$

		数値解	解析解	誤差
n	t_n	x_n	$\exp t_n$	$x_n - \exp t_n$
0	0.0	1.0	1.0	0.0
1	?	?	?	?
2	?	?	?	?

$$\frac{dx}{dt} = -tx + t^3 \quad 0 \le t \le 1$$

$$x(0) = 1$$

		数値解	解析解	誤差
n	t_n	x_n	Exact solution	Error
0	0.0	1.0	1.0	0.0
1	?	?	?	?
2	?	?	?	?

24

問題 2

次の常微分方程式の初期値問題を、刻み幅 $h = 0.1$ 及び $h = 0.05$ のルンゲ・クッタ法で数値的に解き、解析解と比較せよ。比較は下記の形式で出力すること。

$$\frac{dx}{dt} = x \quad 0 \le t \le 1$$

$$x(0) = 1$$

	数値解		解析解	誤差
n	t_n	x_n	$\exp t_n$	$x_n - \exp t_n$
0	0.0	1.0	1.0	0.0
1	?	?	?	?
2	?	?	?	?

$$\frac{dx}{dt} = -tx + t^3 \quad 0 \le t \le 1$$

$$x(0) = 1$$

	数値解		解析解	誤差
n	t_n	x_n	Exact solution	Error
0	0.0	1.0	1.0	0.0
1	?	?	?	?
2	?	?	?	?

25

問題 3

次の常微分方程式を Runge-Kutta 法で数値的に解き視覚化せよ

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - \frac{x}{K})x$$

パラメータ r, K および初期値 x_0 は適当な値（正）

連続時間のロジスティックモデル

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\epsilon}(x_2 - \frac{1}{3}x_1^3 + x_1) \qquad \varepsilon > 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1$$

van der Pol の振動子

$\varepsilon = 1.0,\ 0.5, 0.1$ とすると解の振る舞いはどうなるか調べよ（初期値は適当）

横軸を t, 縦軸を x_1 と x_2 としたグラフと、
横軸を $x_1(t)$, 縦軸を $x_2(t)$ とした相平面上の解軌道の二つのグラフを描け。

26

問題 4

次の常微分方程式を Runge-Kutta 法を用いて数値的に解いて視覚化せよ

$$\frac{dx_1}{dt} = a(x_2 - x_1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1x_3 + bx_1 - x_2$$

ただし、$a = 10, b = 28, c = 8/3$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1x_2 - cx_3$$

初期値は $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0)$ とする。

Lorenz 方程式と呼ばれ、流体のダイナミクスを記述するモデル

Lorenz、カオス、というキーワードで WEB 検索

27

Mathematica による数値解

Mathematica を用いて常微分方程式を数値的に解くことができる。C プログラミングによる結果と比較してみるとよいだろう。

```
deq = { x'[t] == (1 - x[t])x[t], x[0] == 0.01}
```

Mathematica では等式は == であることに注意

右の初期値問題を deq として定義。 $\frac{dx}{dt} = (1 - x)x$, $x(0) = 0.01$

```
sol = NDSolve[ deq, x[t], {t, 0, 10}]
```

初期値問題 deq を 区間 $0 \le t \le 10$ で数値的に解き、sol と名付ける。

```
Plot[ Evaluate[ x[t]/.sol ] , {t, 0, 10}]
```

数値的に解いた結果を t の関数として描く。
/. は右辺のルールを左辺に代入することを表す

```
x[t]/.sol/.t->5
```

$x(5)$ を数値的に求める。

28

例（続き）

```
deq2 = { x1'[t] == -x2[t] - x1[t]^2, x2'[t] == 2 x1[t] - x2[t], x1[0] == x2[0] == 1}
```

右の初期値問題を定義

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_1^2 \quad x_1(0) = 1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 \quad x_2(0) = 1$$

```
sol2 = NDSolve[ deq2, {x1[t], x2[t]}, {t, 0, 20}]
```

区間 $0 \le t \le 20$ で数値的に解く

```
Plot[ Evaluate[ x1[t]/.sol2 ], {t, 0, 20}]
```

横軸を t としたグラフを描く

```
Plot[ Evaluate[ x2[t]/.sol2 ], {t, 0, 20}]
```

```
ParametricPlot[ Evaluate[ {x1[t], x2[t]}/.sol2 ], {t, 0, 20}]
```

相平面上の解軌道 ($x_1(t), x_2(t)$) を描く

29

Mathematica のグラフを LaTeX に貼り込む

Mathematica で描いたグラフを EPS 形式でファイルに保存。(EPS: Encapsulated PostScript)

保存したいグラフを選択して、Mathematica のメニューから、
Edit ---> Save Selection As ---> EPS

LaTeX ドキュメントのプリアンブルに下を追加。

```
\usepackage{graphicx}
```

EPS グラフィックス graph.eps を取り込む

```
\includegraphics{graph.eps}
```

図を中央そろえ、横幅 5cm に縮小拡大して表示する場合

```
\begin{cetner}
\includegraphics[width = 5cm]{graph.eps}
\end{center}
```

30