

確率変数の変換

- 一様乱数 $X = U[0, 1)$ ($0 \leq X < 1$) から、様々な確率分布に従う乱数を生成できる
- 指数分布に従う乱数、正規分布に従う乱数、などなど
- 具体例：一様乱数 $X = U[0, 1)$ に対して、
 - $Y = X + 1$ は $U[1, 2)$ に従う（自明）
 - $Y = 2X$ は $U[0, 2)$ に従う（自明）
 - $Y = X^2$ はどんな分布になるか？
 - 任意の変数変換 $Y = f(X)$ により、 Y はどのような分布に従うのか？

問題 3

- 0 から 1 の一様乱数 $X = U[0, 1)$ を下記の変数変換を施して得られる確率変数 Y が満たす確率密度関数 $q(y)$ を求めよ。疑似一様乱数を用いて、この結果を確かめよ
 - $Y = -\log X$
 - $Y = \sqrt{X}$
- 2つの一様乱数 $X = U[0, 1)$, $Y = U[0, 1)$ を用いて以下の変換で得られる確率変数 Z は、平均が0、分散が1の正規分布に従う（ボックス-ミュラー法）。 Z を多数を生成し確率分布を描いて確認せよ

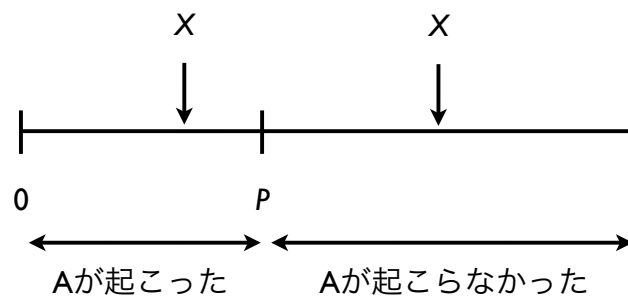
$$Z = \sqrt{-2 \log X} \cos 2\pi Y$$

モンテカルロ法

- 乱数を用いてシミュレーションや数値計算を行う手法の総称
- 物理学や生物学などのシミュレーションに良く用いられる
- 具体例：コイン投げ、ランダムウォーク（乱歩）、など、確率論的な事象の変化をアルゴリズムとして記述して実行する

確率的な事象のプログラム実装

- 確率 P で起こる事象 A をプログラムとして実装 ($0 \leq P \leq 1$)
- $[0, 1)$ の疑似一様乱数 X を生成
- $X < P$ なら、事象 A が起こったと見なす。そうでなければ起こらなかったと見なす



X は区間 $[0, 1)$ で一様

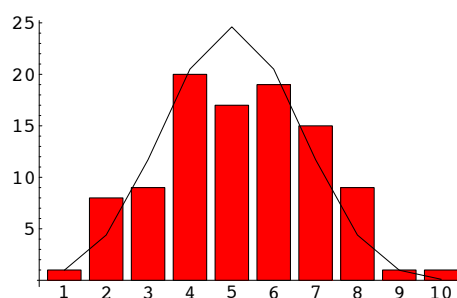
コイン投げ

- 正しく造られたコインは裏表がでる確率は $P = 1/2$ である。
- n 回コインを投げたとき、 i 回表がでる確率 ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) は、二項分布で与えられる

$$P_n(i) = {}_n C_i \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

具体例： $P = 1/2, n = 10$ を 100 回繰り返したとき、表が出た回数

{7, 7, 9, 8, 4, 7, 8, 3, 7, 3, 1, 4, 2, 4, 5, 5,
6, 3, 8, 7, 5, 2, 6, 4, 4, 6, 3, 3, 5, 6, 2, 5, 8,
2, 6, 2, 6, 4, 6, 7, 10, 4, 5, 8, 5, 4, 4, 5, 4,
5, 3, 3, 8, 5, 5, 6, 5, 5, 4, 6, 6, 4, 2, 7, 2, 6,
6, 6, 4, 7, 5, 6, 3, 6, 7, 3, 6, 6, 8, 5, 6, 4, 7,
4, 2, 4, 5, 8, 7, 4, 4, 5, 7, 4, 4, 7, 7, 8, 6, 7}



問題 4

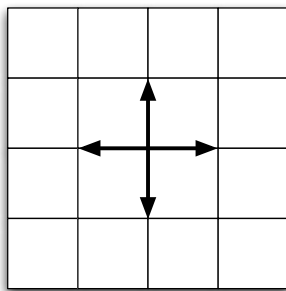
- コインを n 回投げる試行（ベルヌーイ試行）を k 回繰り返す。各試行で表が出た回数を i とする。 i をファイルに書き出せ。
- 試行数 k を十分大きくとったとき、 i の分布図を描け。また理論分布と比較せよ。 n の値は適当でよい。

1回の試行で表が出た回数を戻り値として返す関数を定義

```
int binomial(int num, double prob)
{
    .....
    return count;
}
```

格子上のランダムウォーク

- 2次元格子空間を考える。各個体は格子に存在し、単位時間内に隣接する4つの格子のいずれかへ等しい確率 $1/4$ で移動する。
- 初期分布として原点に N 個体存在する状態を考える。時刻 t での個体の空間分布はどのようなものか？
- また、時刻 t と原点から最も離れた個体の距離との関係は？



格子上のランダムウォーク

- N 個体の位置を 2次元配列で表現するランダムウォークに取り組む
- 初期状態として全ての個体は原点に位置するとする
- 以下を繰り返す（時刻のループ）
 - 次のアルゴリズムに従って、 N 個体の座標を変化させる

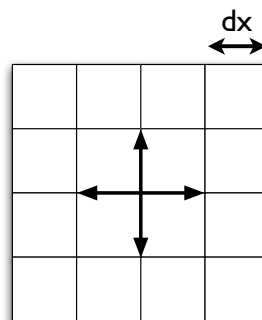
各個体の x, y 座標は

確率 $1/4$ で $x += dx$

確率 $1/4$ で $x -= dx$

確率 $1/4$ で $y += dx$

確率 $1/4$ で $y -= dx$



プログラム骨格

```
#define N 100

double x[N], y[N] // 個体の座標

initialize();

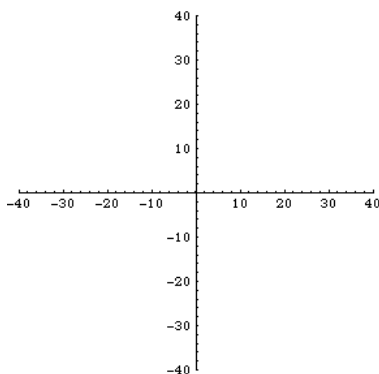
for(step=0; step<STEP; step++){
  move_indivs();// 個体を移動させる関数
  write_data();// 個体の位置をファイルに書き出す
}

void move_indivs()
{
  ....
}
```

2次元格子上の乱歩

```
data = ReadList[ "data", Real, RecordLists -> True ];
data2 = Map[ Partition[#, 2] &, data];
Length[data2]
{ Max[data2], Min[data2] }

Do[
  ListPlot[ data2[[i]], PlotRange -> {{-40, 40}, {-40, 40}}, AspectRatio -> 1 ]//Print, {i, 1,
Length[data2]}
]
```



問題 5

- 個体の位置は格子上ではなく、連続空間上にあるとする (x, y 座標が実数)
- 単位時間後の個体の移動に関して **適当なルール** を設定し、 N 個体の移動分散の様子を調べよ。ルールとしては例えば下記が考えられる
 - ルール 1: 一定の距離 L だけ移動するが、方角は任意の方向に等しい確率で移動
 - ルール 2: 移動距離は一定 L だが、方向は N 個体の重心へ向かう、など



自分で設定したルールの下で、空間分布の時間変化および時刻 t と原点から最も離れた個体の距離との関係を調べよ