H20 計算機実験 2

奈良女子大学・理学部・情報科学学科
担当 高須

2008 年 4 月 25 日（金）

1　2 種系の反応拡散方程式

2 種系の反応拡散方程式を考える。2 種系とは、2 種類の粒子（化学物質など）がある規則に従って反応しつつ、それぞれの濃度が相互依存して変化する系を指す。まず最初に 1 次元空間上の拡散に注目する。

物質 1 の濃度を $u(t,x)$、物質 2 の濃度を $v(t,x)$ とすると、1 次元 2 種系の反応拡散方程式は一般的に以下の連立偏微分方程式で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u,v) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(u,v) \tag{2}$$

定数 D_u, D_v はそれぞれ物質 1 と 2 の拡散係数、関数 $f(u,v), g(u,v)$ は両物質の反応による濃度変化を表す反応項である。

2　空間一様解

この節では空間的に一様な解に注目する。物質濃度は空間位置 x とは無関係であるから $u(t,x) = U(t), v(t,x) = V(t)$ と表現できる。したがって、上式の拡散項（x の 2 回偏微分）はゼロとなり、上式は次の連立常微分方程式に帰着する。

$$\frac{dU}{dt} = f(U,V) \tag{3}$$

$$\frac{dV}{dt} = g(U,V) \tag{4}$$

関数 $f(u,v), g(u,v)$ を具体的に与えれば、初期条件 $U(0), V(0)$ の下、空間一様解 U, V の振る舞い（時間変化）が決まる。

具体例として関数 $f(u,v), g(u,v)$ を以下の関数で与える。

$$f(u,v) = r\left(1 - \frac{u}{K}\right)u - auv \tag{5}$$

$$g(u,v) = buv - dv \tag{6}$$

ここでパラメータ r, K, a, b, d は正の定数である。

$V = 0$ の時、$f(U,V)$ はロジスティック成長を表す関数 $r(1-U/K)U$ となる。また、$U = 0$ の時、$g(U,V) = -dV$ となり、V は次の常微分方程式に従う。

$$\frac{dV}{dt} = -dV$$

この解は $V(t) \propto e^{-dt}$ であり、$t \to \infty$ で $V(t) \to 0$ となる（V は時刻とともに指数的に減少）。

つまり式 (5) と (6) は、V が存在しなければ、U はロジスティック成長して K に収束（$U(\infty) = K$）、U が存在しなければ、V は指数的にゼロに減少するが、互いの濃度が正であれば U の増加率は aUV だけ低下、V の増加率は bUV だけ増加、する系を表現している。

この系では U を再生する資源（植物など）、V を消費者（動物など）と見なすことができる。自然再生する資源 V がロジスティック成長をしていて、消費者 V が消費率 aUV で資源を消費し、消費率に比例した増殖率 bUV で増殖しつつ、死亡率 d で減少している系である。

式 (5) と (6) を用いた系を適当なパラメータ値のもとで数値的に解いた結果を図 1 に示す。

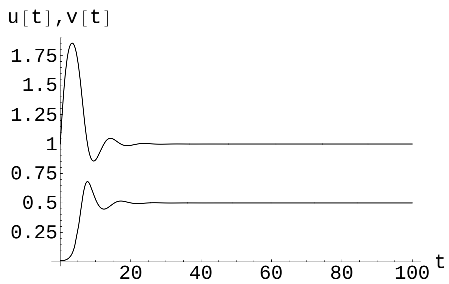

Figure 1: $u(t), v(t)$ のダイナミクス。$r = 1, K = 2, a = 1, b = 1, d = 1$。初期値 $u(0) = 1, v(0) = 0.01$

3　拡散の効果

上節では、空間的に一様な解の振る舞いを見た。本節では、これに拡散を考慮したモデルに注目する。陽的差分法により、一次元空間 $0 \leq x \leq 1$ を空間刻み Δx、時間を時間刻み Δt で差分化する。空間位置 $x = \Delta i$（$i = 1, 2, \cdots, SIZE$）であることを用いると、

$$u_i' = u_i + C_u\left(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\right) + f(u_i, v_i)\Delta t \tag{7}$$

$$v_i' = v_i + C_v\left(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}\right) + g(u_i, v_i)\Delta t \tag{8}$$

を得る。ただし、$'$ は時刻 $t + \Delta t$ の状態を表し、$C_u = D_u\Delta t/(\Delta x)^2$、$C_v = D_v\Delta t/(\Delta x)^2$ である。また、境界条件として反射壁を設定し、常に

$$u_0 = u_1, u_{SIZE+1} = u_{SIZE}, v_0 = v_1, v_{SIZE+1} = v_{SIZE}$$

としておく。

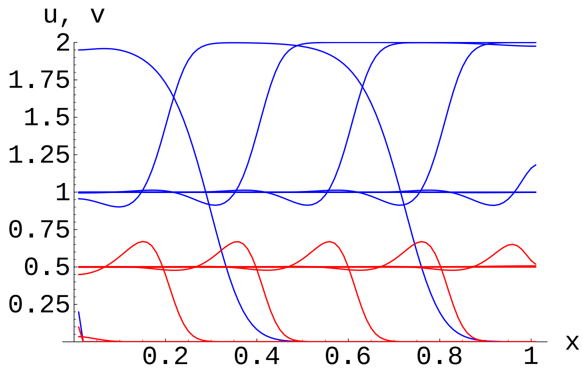

Figure 2: $u(t), v(t)$ のダイナミクス。青が $u(t,x)$、赤が $v(t,x)$。$r = 1, K = 2, a = 1, b = 1, d = 1, D_u = 0.0005, D_v = 0.0001$。初期条件は左端に少量の密度を導入。

1 次元上の動態例を図 2 に示す。

以下の課題に取り組むこと。

- 2 種系 1 次元反応拡散方程式を陽的差分法で数値的に解くプログラムを完成させよ。
- 計算結果を実験中に指示した様式にしたがってファイルに書き出せ。
- 計算結果を Mathematica を用いて視覚化せよ。
- パラメータ、特に D_u, D_v、と解の振る舞いについて調べてレポートを作成せよ。