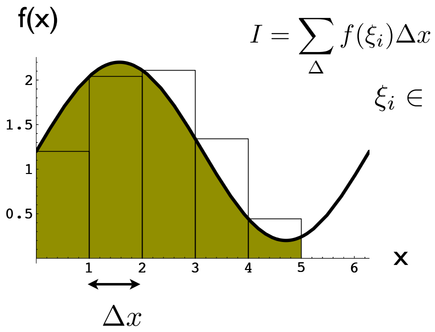
関数の積分

与えられた関数の（リーマン）積分 = 区間面積

リーマン和の極限値としての積分

$$I = \sum_{\Delta} f(\xi_i)\Delta x \rightarrow \int_a^b f(x)dx$$

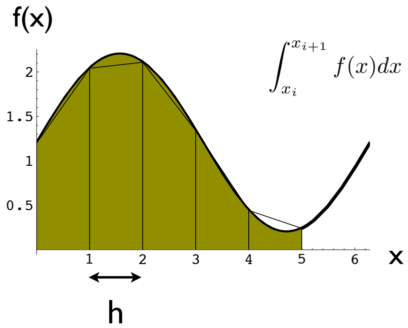
$$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$



台形公式

- 被積分関数を1次関数の接合として近似し、台形の面積の和として積分を求める方法

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}h$$



$$I = \int_a^b f(x)dx = \left\{\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+i\times h)\right\}h$$

台形公式の誤差 1

- 関数を直線で近似することによる誤差が生じる（関数が一次関数でない場合）

真の値

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx = \int_0^h f(x_i+x)dx \\ &= \int_0^h \left[f(x_i) + f'(x_i)x + \frac{f''(x_i)}{2}x^2\cdots\right]dx \\ &= f(x_i)h + \frac{f'(x_i)}{2}h^2 + \underline{\frac{f''(x_i)}{6}}h^3 + O(h^4) \end{aligned}$$

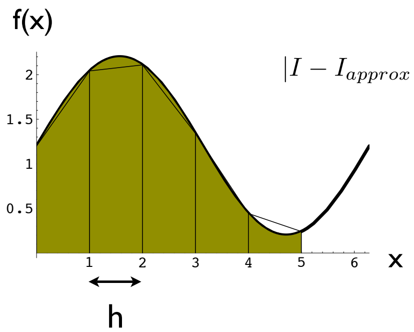
近似値

$$\begin{aligned} I_{approx} &= \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_i+h)] \\ &= \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_1)}{2}h^2\cdots\right] \\ &= f(x_i)h + \frac{f'(x_i)}{2}h^2 + \underline{\frac{f''(x_i)}{4}}h^3 + O(h^4) \end{aligned}$$

台形公式の誤差 2

- 一つの台形積分にかかる誤差のオーダーは、刻み幅 h の 3 乗に比例
- 積分範囲を N 分割した場合 $h = (b - a)/N$。累積誤差は h の 2 乗に比例

$$|I - I_{approx}| = O(h^2) = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

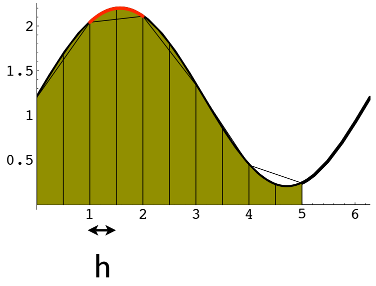


シンプソンの公式

- 被積分関数を 2 次関数の接合として近似し、2 次曲線の面積の和として積分を求める方法

$$(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1})), (x_{i+2}, f(x_{i+2}))$$

を通る 2 次曲線（赤色）で関数を近似



$$P(x) = f(x_i)\frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})} + f(x_{i+1})\frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})} + f(x_{i+2})\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}$$

ラグランジュの補完

シンプソンの公式 2

- 2 次関数による近似値。 誤差は h の 5 乗のオーダー

$$I_{approx} = \int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+2}}{2}\right) + f(x_{i+2})\right]$$

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx - I_{approx}\right| = O(h^5)$$

- 累積誤差は h の 4 乗のオーダー

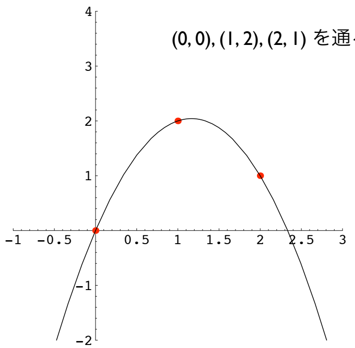
$$|I - I_{approx}| = O(h^4) = O\left(\frac{1}{N^4}\right)$$

シンプソンの公式の区間分割数は偶数であることに注意

多項式による補間

- N 個の離散点 (x_i, y_i) を通る N–1 次の多項式は唯一存在する (i = 1, 2, ... N)

(0, 0), (1, 2), (2, 1) を通る 2次曲線　（ラグランジュ補間）



$$P(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$$

関数へのポインタ

- 関数へのポインタを用いて可搬性のある関数を定義する

```
int main (int argc, const char * argv[]) {

  double a = 0.0, b = 1.0;
  int n = 100;
  double (*myfunc)(double);

  myfunc = fn;
  printf("%f, %f\n", a, (*myfunc)(a)); // a での関数 myfunc の値を表示
  // リーマン和を計算する関数 riemann_sum の呼び出し
  printf("%f, %f, %f\n", a, b, riemann_sum(*myfunc, a, b, n));

  return 0;
}

double fn(double x)
{
  return 1.0/(1 + x*x);
}
```

積分を行う関数の定義

```
double riemann_sum( double (*func)(double), double a, double b, int n)
{
  double h, sum = 0.0;
  int i;

  .....

  return sum*h;
}

double trapzd( double (*func)(double), double a, double b, int n)
{
  ....
}

double simpson( double (*func)(double), double a, double b, int n)
{
  ...
}
```

問題 1

以下の積分それぞれについて、

1）リーマン和、2）台形公式、3）シンプソンの公式、を用いた数値積分を求めよ。

区間分割数 N を10, 100, 1000 と変えたとき、真の積分値と 3 つの方法による近似値との誤差を比較すること。

$$\int_0^1 x^2 dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \qquad \int_0^\pi \sin(x) dx$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

	N=10	N=100	N=1000
1) Riemann sum	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
2) Trapezoidal	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
3) Simpson	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
Error	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$