ルンゲ・クッタ法

オイラー法よりも精度が良く、かつ比較的簡単なルンゲ・クッタ法

Runge-Kutta の 1/6 公式（4 次のルンゲ・クッタ）

$$
\begin{aligned}
k_0 &= hf(t, x) \\
k_1 &= hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}k_0) \\
k_2 &= hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= hf(t + h, x + k_2) \\
x(t+h) &= x(t) + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)
\end{aligned}
$$

誤差は $O(h^5)$

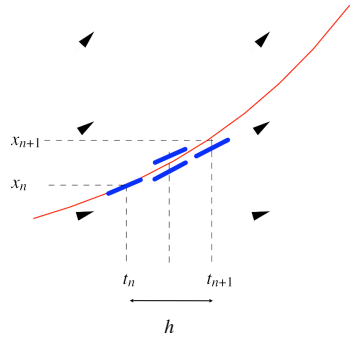
累積誤差は

$$O(h^5) \times \frac{T}{h} = O(h^4)$$

ルンゲ・クッタ法の図解

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

$$
\begin{aligned}
k_0 &= hf(t, x) \\
k_1 &= hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}k_0) \\
k_2 &= hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= hf(t + h, x + k_2) \\
x(t+h) &= x(t) + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)
\end{aligned}
$$



四ヶ所での勾配を用いて x_{n+1} を決定

関数 runge_kutta（1変数）

関数 runge_kutta を呼び出すと、独立変数 t が刻み幅 h だけ進むようにしたい。

n 変数の常微分方程式をルンゲ・クッタ法で解く関数を作る。

関数には引数 t, $x(t)$, h を与え、$t + h$ の状態 $x(t+h)$ を引数を介して関数呼び出し元に返す。

現時刻　現状態　次ステップの状態　刻み幅

```
void runge_kutta(double t, double x, double *x_out, double h)
{
  /* t, x, h から t+h の状態を計算して x_out を介して返却 */
  ...
```

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$$

```
}
```

問題 3

次の常微分方程式の初期値問題を刻み幅 $h = 0.1$ 及び $h = 0.05$ のルンゲ・クッタ法で解き、解析解と比較せよ。比較は下記の形式で出力すること。

$$\frac{dx}{dt} = x \quad 0 \le t \le 1$$

$$x(0) = 1$$

		数値解	解析解	誤差
n	t_n	x_n	$\exp t_n$	$x_n - \exp t_n$
0	0.0	1.0	1.0	0.0
1	?	?	?	?
2	?	?	?	?

$$\frac{dx}{dt} = -tx + t^3 \quad 0 \le t \le 1$$

$$x(0) = 1$$

		数値解	解析解	誤差
n	t_n	x_n	Exact solution	Error
0	0.0	1.0	1.0	0.0
1	?	?	?	?
2	?	?	?	?

刻み幅 h を半分にすると解の精度はどの程度改善するか確認せよ
また数値解をグラフとして視覚化せよ

問題 4

次の常微分方程式を適当な初期値の下でルンゲ・クッタ法を用いて数値的に解け。
数値解をグラフとして視覚化せよ。また解析解と比較せよ。

$$\frac{dx}{dt} = t(1-x^2)$$

$$t\frac{dx}{dt} = x + \sqrt{t^2+x^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{1+t} + \cos t$$

多変数の常微分方程式

多変数 1 階常微分方程式

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_3(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)
\end{aligned}$$

ベクトル表示

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{x}) \\ f_2(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

オイラー法

$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

ルンゲ・クッタ法

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_0 &= h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\
\mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(t + \frac{1}{2}h, \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_0) \\
\mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}(t + \frac{1}{2}h, \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1) \\
\mathbf{k}_3 &= h\mathbf{f}(t + h, \mathbf{x} + \mathbf{k}_2) \\
\mathbf{x}(t+h) &= \mathbf{x}(t) + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_0 + 2\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)
\end{aligned}$$

多変数の導関数の計算

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{x}) \\ f_2(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

n 個の導関数の値を引数を介して返す関数を定義して用いる。

時刻　状態　導関数の値　次元

```
void derivs(double t, double x[], double derivatives[], int n)
{
  /* t, x[], n から導関数を計算して derivatives[] を介して返却 */
}
```

関数 runge_kutta（多変数）

関数 runge_kutta を呼び出すと、独立変数 t が刻み幅 h だけ進むようにしたい。

n 変数の常微分方程式をルンゲ・クッタ法で解く関数を作る。

関数には引数 t, $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, h を与え、$t+h$ の状態 $(x_1(t+h), x_2(t+h), ..., x_n(t+h))$ は、引数を介して関数呼び出し元に返す。

現時刻　現状態　次ステップの状態　次元　刻み幅

```
void runge_kutta(double t, double x[], double x_out[],
                                                int n, double h)
{
  /* t, x[], n, h から t+h の状態を計算して x_out[] を介して返却 */
  ...
}
```

3 変数常微分方程式の視覚化

1) 計算結果を以下の形式でデータファイルに保存

```
t     x(t)   y(t)   z(t)
↓      ↓      ↓      ↓
0.000 1.00 2.00 3.00
0.001 1.02 1.97 3.03
0.002 1.05 1.94 3.08
...
```

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, x_3) \\ f_2(t, x_1, x_2, x_3) \\ f_3(t, x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

スペースで区切る

2) データファイルの読み込み

```
data = ReadList[ "data_file",  {Real, Real, Real, Real} ];
```

ファイル data_file から ReadList コマンドを用いて(t, x, y, z) を対として数値データを読み込む
読み込んだものに data という名前を付ける

続き

data = $\{\{t_0, x_0, y_0, z_0\}, \{t_1, x_1, y_1, z_1\}, \{t_2, x_2, y_2, z_2\}, \ldots\}$ という形式になっている

Transpose コマンドにより、data の成分を転置したものを dataT とする

```
dataT = Transpose[data];
```

これにより dataT = $\{\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}, \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}, \{y_0, y_1, y_2, \ldots\}, \{z_0, z_1, z_2, \ldots\}\}$

dataT の第 1 成分と第 2 成分を抜き出し、新たに dataX とする

```
dataX = Transpose[ {dataT[[1]], dataT[[2]] } ];
```

同様にして $(t, y(t))$ のデータ dataY 、$(t, z(t))$ のデータ dataZ 、および $(x(t), y(t), z(t))$ のデータ dataXYZ を作る

```
dataY = Transpose[ {dataT[[1]], dataT[[3]] } ];
dataZ = Transpose[ {dataT[[1]], dataT[[4]] } ];
dataXYZ = Transpose[ {dataT[[2]], dataT[[3]], dataT[[4]] } ];
```

続き

横軸を時刻 t 、縦軸を $x(t), y(t), z(t)$ としたグラフを描く。

```
gx = ListPlot[ dataX, PlotJoined->True, PlotRange->All]
gy = ListPlot[ dataY, PlotJoined->True, PlotRange->All]
gz = ListPlot[ dataZ, PlotJoined->True, PlotRange->All]
```

3 つのグラフを重ね合わせて表示

```
Show[gx, gy, gz]
```

3 次元空間の軸をそれぞれ $x(t), y(t), z(t)$ としたグラフ（相空間内の解軌道）を描くには、3 次元グラフパッケージをあらかじめ読み込んでおく

```
<<Graphics`Graphics3D`
ScatterPlot3D[dataXYZ, BoxRatios->{1,1,1}, ViewPoint->{0.810, -2.475, 2.160}]
```

オプション ViewPoint は視点を指定（省略可）

問題 5

次の常微分方程式を Runge-Kutta 法を用いて数値的に解いて視覚化せよ

$$\frac{dx_1}{dt} = a(x_2 - x_1)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 x_3 + b x_1 - x_2$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 x_2 - c x_3$$

ただし、$a = 10, b = 28, c = 8.0/3$

初期値は $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0)$ とする。

Lorenz 方程式と呼ばれ流体のダイナミクスを記述するモデルとして知られる

Lorenz、カオス、というキーワードで WEB 検索し、解の振る舞いについて調べよ。また初期値をわずかにずらすと解軌道がどうなるか比較せよ。

問題 6

次の常微分方程式を Runge-Kutta 法を用いて数値的に解いて視覚化せよ

$$\frac{dx}{dt} = y - y^3$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + x^3$$

なお、初期値 $x(0), y(0)$ をさまざまな値に設定したとき、解が相平面上でどのような軌道を描くか調べて比較せよ。

この常微分方程式の解 ($x(t), y(t)$) は常に次の条件を満たすことを示せ。

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 = C$$

C は初期値で決まる定数

数値的に解いた相平面上の解軌道と関数 $\phi(x, y)$ の等高線の関係について述べよ。

Mathematica で　ContourPlot[y^2/2 – y^4/4 + x^2/2 – x^4/4, {x, –2, 2},{y, –2, 2}]

とすると関数 $\phi(x, y)$ の等高線が描ける