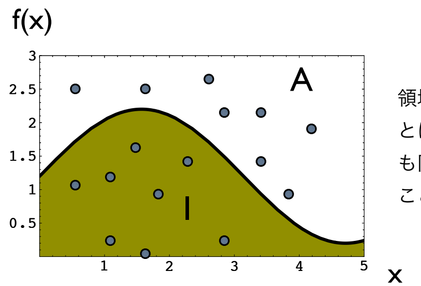
モンテカルロ積分

- 乱数を用いた積分の計算

領域 A (0 ≤ x ≤ 5, 0 ≤ y ≤ 3) でランダムな点をとる。
積分 I は、ランダムな点が曲線 f の下側に落ちる割合と領域 A の
面積の積で与えられる（と予想される）



領域 A でランダムな点をとるとは、領域 A 内のどの場所にも同じ確からしさで点を打つこと。

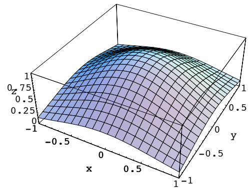
モンテカルロ積分の用途

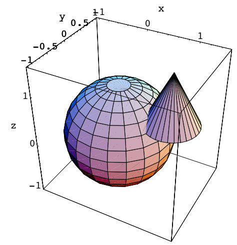
- 重積分など、被関数 f の評価や積分範囲の表現が困難な場合に用いられる（高い精度は望めない）

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) dxdy$$

$$\Omega : -1.5 \leq x, y \leq 1.5$$

被積分関数と積分領域の解析表示は困難



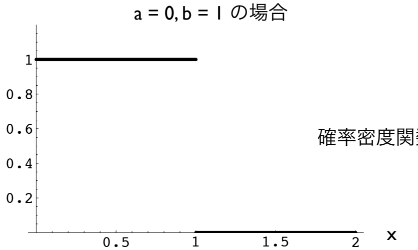


一様乱数

- 区間 [a, b] で一様な乱数 X（a から b の値を同じ確からしさで取る）

$$\mathrm{Prob}[x < X < x + dx] = \begin{cases} \frac{1}{b-a} dx & a < x < b \\ 0 & \mathrm{Otherwise} \end{cases}$$

a = 0, b = 1 の場合



確率密度関数はステップ関数

疑似乱数の生成

- 疑似乱数をソフトウェア的に生成するアルゴリズム

線形合同法

$$X_{i+1} = (A \times X_i + B) \mod M$$

適当な定数 A, B, M (M > A, M > B, A > 0, B > 0) を用いて、
X_0 を乱数の種として逐次乱数列 X_i を生成する方法

周期は最大で M

rand 関数

- 多くの C 言語処理系で実装される rand 関数は線形合同法により疑似乱数を生成

void srand(unsigned)
乱数の種（初期値）を指定

int rand(void)
疑似乱数を生成

```
#include <stdlib.h>
#include <time.h>

unsigned seed;
int randomInt;
double randomDouble;

seed = (unsigned)time(NULL);

srand(seed);
printf("RAND_MAX is %d\n", RAND_MAX);
printf("Seed is %d\n", seed);

for(i=0; i<100; i++){
  randomInt = rand();
  randomDouble = randomInt/(RAND_MAX + 1.0);
  printf("%d, %f\n", randomInt, randomDouble);
}
```


メルセンヌ・ツイスタ

- より高品質な疑似乱数を生成する方法に Mersenne Twister がある

void init_genrand(long)
乱数の種（初期値）を指定

double genrand_real1(void)
疑似乱数 [0, 1] を生成

両関数とも外部ファイルで
定義されている

```
#include <stdio.h>
#include <time.h>

extern void init_genrand(long);
extern double genrand_real1(void);

unsigned long seed;
int i;
double rand;

seed = (long)time(NULL);

init_genrand(seed);

for(j=0; j<100; j++){
  rand = genrand_real1();
  printf("%.20f\n", rand);
}
```

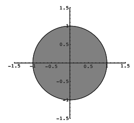

問題 1

- メルセンヌ・ツイスタを用いて、閉区間 [0, 1] の一様疑似乱数を N 個生成せよ。
- [0, 1] を区間幅 0.1 で 10 個の区間に区切り、各区間に落ちた疑似乱数の数を数えてファイルに書き出せ。
- 乱数が一様であれば、各区間に落ちる数の平均は N/10 と予想される。生成した疑似乱数が統計的に一様であるか、どのようにして判定したら良いか考えよ。

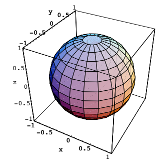
問題 2

- モンテカルロ法により以下の積分の近似値を求め、真の解と比較せよ

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy$$

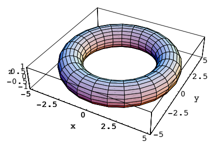


$$\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} dxdydz$$



半径 1 の円を z 軸の周りで半径 4 で回転させて出来る
トーラスの体積

$$\iiint_{(\sqrt{x^2+y^2}-4)^2+z^2\le 1} dxdydz$$



問題 3

- モンテカルロ法により以下の積分の近似値を求めよ

原点を中心とする半径 2 の球と、
(1, 0, 1) を中心とする半径 1 の球の
合成部分の体積