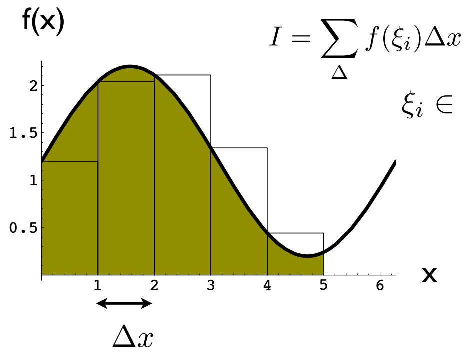
# 関数の積分

与えられた関数の（リーマン）積分 = 区間面積

リーマン和の極限値としての積分

$$I = \sum_{\Delta} f(\xi_i)\Delta x \to \int_a^b f(x)dx$$

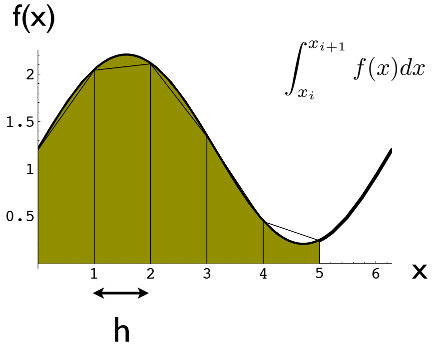
$$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$






# 台形公式

- 被積分関数を1次関数の接合として近似し、台形の面積の和として積分を求める方法




$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}h$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \left\{ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i \times h) \right\} h$$



# 台形公式の誤差 1

- 関数を直線で近似することによる誤差（関数が一次関数でない場合）

真の値

$$I = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx = \int_0^h f(x_i + x)dx$$
$$= \int_0^h \left[ f(x_i) + f'(x_i)x + \frac{f''(x_i)}{2}x^2 \cdots \right] dx$$
$$= f(x_i)h + \frac{f'(x_i)}{2}h^2 + \frac{f''(x_i)}{6}h^3 + O(h^4)$$

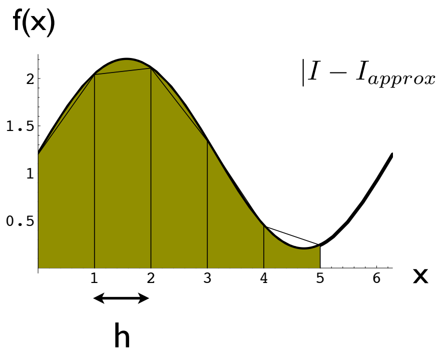
近似値

$$I_{approx} = \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_i + h)]$$
$$= \frac{h}{2}\left[ f(x_i) + f(x_i) + f'(x_i)x + \frac{f''(x_1)}{2}x^2 \cdots \right] dx$$
$$= f(x_i)h + \frac{f'(x_i)}{2}h^2 + \frac{f''(x_i)}{4}h^3 + O(h^4)$$



# 台形公式の誤差 2

- 一つの台形積分にかかる誤差のオーダーは、刻み幅 h の 3 乗に比例
- 積分範囲を N 分割した場合 h = (b –a)/N。累積誤差は h の 2 乗に比例



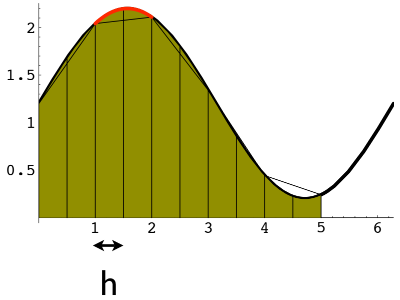

$$|I - I_{approx}| = O(h^2) = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

# シンプソンの公式

- 被積分関数を 2 次関数の接合として近似し、2 次曲線の面積の和として積分を求める方法

$$(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1})), (x_{i+2}, f(x_{i+2}))$$

を通る 2 次曲線（赤色）で関数を近似




$$P(x) = f(x_i)\frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})} + f(x_{i+1})\frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})} + f(x_{i+2})\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}$$

ラグランジュの補完



# シンプソンの公式 2

- 2 次関数による近似値。 誤差は h の 5 乗のオーダー

$$I_{approx} = \int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+2}}{2}\right) + f(x_{i+2})\right]$$

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx - I_{approx}\right| = O(h^5)$$

- 累積誤差は h の 4 乗のオーダー

$$|I - I_{approx}| = O(h^4) = O\left(\frac{1}{N^4}\right)$$

シンプソンの公式の区間分割数は偶数であることに注意



# 問題

以下の積分それぞれについて、

1）リーマン和、2）台形公式、3）シンプソンの公式、を用いた数値積分を求めよ。

また、区間分割数 N を10, 100, 1000 と変えたとき、真の積分値と 3 つの方法による近似値との誤差を比較すること。

$$\int_0^1 x^2 dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \qquad \int_0^\pi \sin(x)dx$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

| | $N$=10 | $N$=100 | $N$=1000 |
|---|---|---|---|
| 1) Riemann sum | ⋯ | ⋯ | ⋯ |
| 2) Trapezoidal | ⋯ | ⋯ | ⋯ |
| 3) Simpson | ⋯ | ⋯ | ⋯ |
| Error | ⋯ | ⋯ | ⋯ |