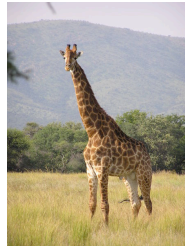


## パターン形成のモデル

### 動物の表皮パターン



<http://www.asazoo.jp/doubutu/zoostar/1simauma/simauma.html>



<http://ja.wikipedia.org/wiki/キリン>



[http://www.bio.nagoya-u.ac.jp/~z3/research/research\\_j.htm](http://www.bio.nagoya-u.ac.jp/~z3/research/research_j.htm)

表皮模様(パターン)は、発生段階の様々な機構により生じると考えられる

多数の物質と複雑な代謝機構が関係しないと生じない現象なのか?

## 化学反応におけるパターン形成

### 化学反応における振動

Belousov-Zhabotinskii Reaction (BZ)

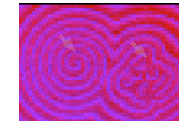
マロン酸の酸化反応  $\text{HBrO}_2, \text{Br}^-, \text{Ce}^{4+}, \text{BrO}_3^-, \text{HOBr}$

各物質濃度が周期的な変動を示す現象

[http://www.uni-regensburg.de/Fakultaeten/nat\\_Fak\\_IV/Organische\\_Chemie/Didaktik/Keusch/D-oscill-e.htm](http://www.uni-regensburg.de/Fakultaeten/nat_Fak_IV/Organische_Chemie/Didaktik/Keusch/D-oscill-e.htm)

BZ reaction in two-dimensional medium

2次元媒体上でリング・ラセン状パターンを示す



<http://people.musc.edu/~aliev/BZ/BZexplain.html>

## パターン形成の数理

単純なルールにより様々なパターン形成が可能

複数物質の反応と拡散がもたらすパターン

反応拡散方程式で記述されるパターン形成

物質  $u, v$  がそれぞれ関数  $f, g$  に従い反応すると同時に拡散するモデル

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v)$$

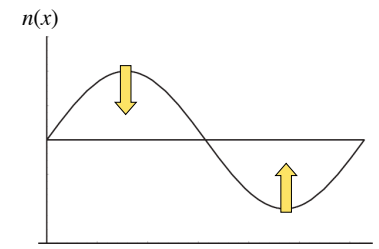
## 拡散の性質

拡散は、空間上の濃度変位を均す

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

濃度が高い(上に凸)--> 濃度減少

濃度が低い(下に凸)--> 濃度増加



境界上で物質の行き来が無い  
反射条件下では、一様分布に収束

## 拡散不安定性

一様分布の不安定化: チューリングパターン Turing pattern

2 種類の物質  $u, v$  の反応と拡散により  
空間的に不均一なパターンが生じる

1) 一様解  $u^*, v^*$  は線型安定

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v)$$

$$\frac{du}{dt} = f(u, v)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v)$$

$$\frac{dv}{dt} = g(u, v)$$

2) 拡散の働きにより一様解が不安定化し  
不均一パターンが生じる

## 拡散不安定が起こる条件

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v)$$

一様解からの摂動に関する線型近似

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v)$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u(t, x) - u^* \\ v(t, x) - v^* \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w} = A \mathbf{w} + D \nabla^2 \mathbf{w} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

不安定周期解が出現する条件

$$f_u + g_v < 0 \quad \text{and} \quad f_u g_v - f_v g_u > 0$$

$$\mathbf{w} = \sum_k c_k e^{\lambda t} \exp[ikx]$$

$$df_u + g_v > 0 \quad \text{and}$$

$$(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u) > 0$$

## 拡散不安定性の例1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v)$$

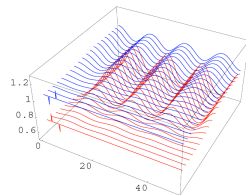
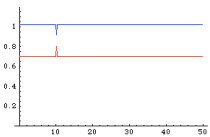
Schnakenberg kinetics:

$$f(u, v) = k_1 - k_2 u + k_3 u^2 v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v)$$

$$g(u, v) = k_4 - k_3 u^2 v$$

1次元空間上の拡散不安定



適当なパラメータを用いて安定一様解  $u^*, v^*$  に摂動を加えると  
周期的パターンが生じる

## 拡散不安定性の例2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v)$$

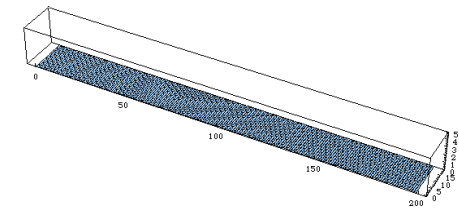
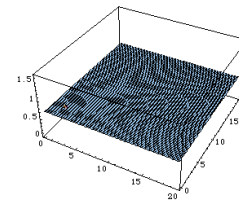
Schnakenberg kinetics:

$$f(u, v) = k_1 - k_2 u + k_3 u^2 v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v)$$

$$g(u, v) = k_4 - k_3 u^2 v$$

2次元空間上の拡散不安定



## 拡散不安定性は表皮パターンを説明できるか

拡散不安定性: 2 種類の物質の反応+拡散により非均一パターンが可能

単純なルールであってもパターンを産み出すことは可能

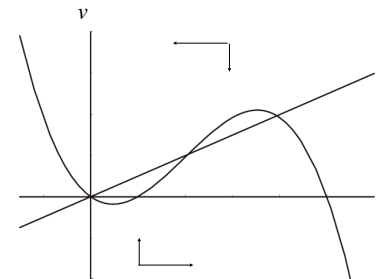
反応拡散モデルによる拡散不安定性と現実系との比較

これらの因子に対応する物質が実在するのか?

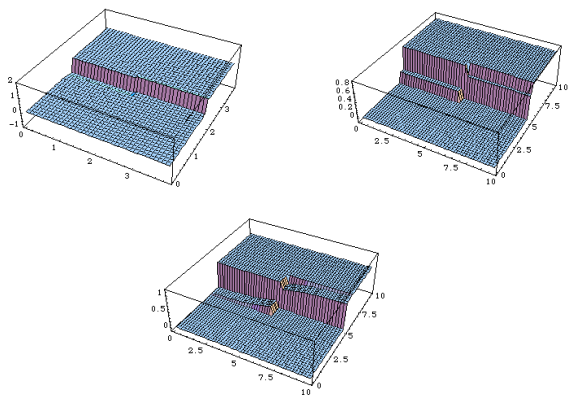
## 双安定ダイナミクス+拡散

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v) \quad f(u, v) = \frac{u(u-a)(1-u)-v}{\epsilon}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v) \quad g(u, v) = u - \gamma v$$



## 例 1

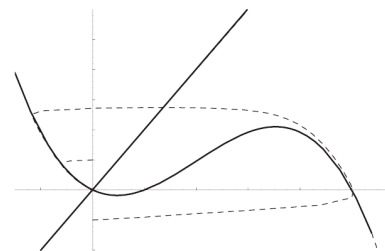


各パラメータ値、初期分布、領域サイズに依存して様々な非均一パターンが生じる

## 興奮性ダイナミクス+拡散

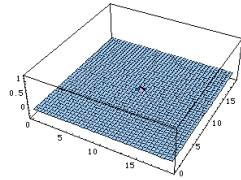
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v) \quad f(u, v) = \frac{u(u-a)(1-u)-v}{\epsilon}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v) \quad g(u, v) = u - \gamma v$$

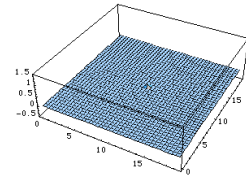


閾値を超える刺激により  
解軌道が大きく周回する

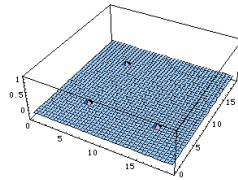
## 例 2



ディスク状平衡解



リング波

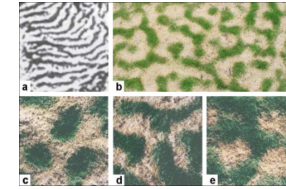


迷路模様

## 生態系におけるパターン形成

### 植物の分布パターンの数理

Hardenberg et al., Diversity of vegetation patterns and desertification. Physical Review Letters, 87(19):198101, 2001



異なる条件下での植物の分布 (縞模様、点模様、一様分布)

2次元空間における植物の成長+拡散+水分分布のダイナミクスモデル

## Hardenberg モデル

$n(t, x, y)$ :  $(x, y)$  における植物生体量

$w(t, x, y)$ :  $(x, y)$  における水量

クローン繁殖+種の分散による拡散

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\gamma w}{1 + \sigma w} n - n^2 - \mu n + \nabla^2 n$$

水量  $w$  に依存するロジスティック成長

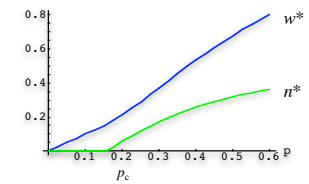
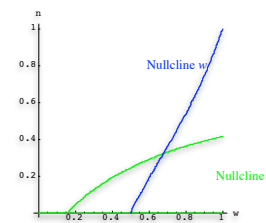
$$\frac{\partial w}{\partial t} = p - (1 - \rho n)w - w^2 n + \delta \nabla^2 (w - \beta n)$$

降水量    蒸発量    植物吸収量    植物依存拡散

## 空間一様解のダイナミクス

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\gamma w}{1 + \sigma w} n - n^2 - \mu n \quad \frac{\partial w}{\partial t} = p - (1 - \rho n)w - w^2 n$$

$\gamma, \sigma, \mu, \rho$ : 固定、 $p = 0.5$



$p_c < p$  の時、非負植物生体量平衡点

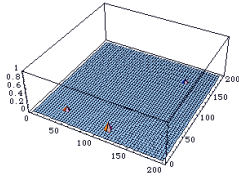
## パターン形成の例 1

水の拡散は植物生体量に依存 (Cross diffusion)

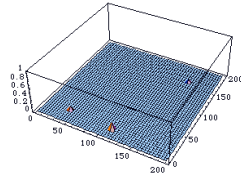
$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\gamma w}{1 + \sigma w} n - n^2 - \mu n + \nabla^2 n$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = p - (1 - \rho n)w - w^2 n + \delta \nabla^2 (w - \beta n)$$

降水量  $p$  大

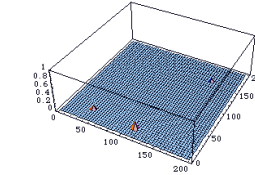


降水量  $p$  中

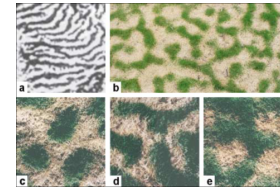
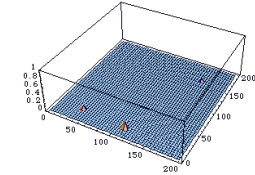


## パターン形成の例 2

降水量  $p$  小



降水量  $p$  微小



美直に見られる植生パターンは、  
植物と水の反応+拡散で説明可能か？

Hardenberg et al., Diversity of vegetation patterns and desertification, Physical Review Letters, 87(19):198101, 2001

## パターン形成の数理

反応拡散方程式による様々なパターン形成

自然界に見られる多種多様なパターン形成の仕組みを統一的に理解する枠組みを提供

パターンをもたらす普遍的なメカニズムの解明

数学理論と計算機シミュレーションの融合

+現実系でパターン形成に関わる物質・代謝機構の同定