平衡点の局所安定性解析

2 変数常微分方程式の平衡点の局所安定性解析

$$\frac{dn_1}{dt} = f_1(n_1, n_2)$$
$$\frac{dn_2}{dt} = f_2(n_1, n_2)$$

Lotka Volterra 競争モデルでは

$$f_1(n_1, n_2) = r_1\left(1 - \frac{n_1 + \alpha_{12} n_2}{K_1}\right) n_1$$
$$f_2(n_1, n_2) = r_2\left(1 - \frac{\alpha_{21} n_1 + n_2}{K_2}\right) n_2$$

時間的に変化しない状態を平衡状態（平衡点）と呼ぶ。

平衡点 (n_1^*, n_2^*) は次式を満たす

$$\frac{dn_1}{dt} = f_1(n_1^*, n_2^*) = 0$$
$$\frac{dn_2}{dt} = f_2(n_1^*, n_2^*) = 0$$

1

安定性解析 1

平衡点からの微小なずれを $h_1(t), h_2(t)$ とする

$$n_1(t) = n_1^* + h_1(t),\ \ n_2(t) = n_2^* + h_2(t)$$

これを元の式に代入して、ずれ h_1, h_2 に関する式に書き直す

$$\frac{dn_1}{dt} = f_1(n_1, n_2)$$
$$\frac{dn_2}{dt} = f_2(n_1, n_2)$$

⇨

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{d(n_1^* + h_1)}{dt} = \frac{dh_1}{dt} = f_1(n_1^* + h_1, n_2^* + h_2)$$
$$\frac{dn_2}{dt} = \frac{d(n_2^* + h_2)}{dt} = \frac{dh_2}{dt} = f_2(n_1^* + h_1, n_2^* + h_2)$$

2

安定性解析 2

2 変数関数のテイラー展開をして、ずれが微少量であることから h_1, h_2 の
2 次以上の項を無視すると、次式を得る。

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{\partial f_1(n_1^*, n_2^*)}{\partial n_1} h_1 + \frac{\partial f_1(n_1^*, n_2^*)}{\partial n_2} h_2$$
$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{\partial f_2(n_1^*, n_2^*)}{\partial n_1} h_1 + \frac{\partial f_2(n_1^*, n_2^*)}{\partial n_2} h_2$$

ベクトルと行列表示では
右式となる

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(n_1^*, n_2^*)}{\partial n_1} & \frac{\partial f_1(n_1^*, n_2^*)}{\partial n_2} \\ \frac{\partial f_2(n_1^*, n_2^*)}{\partial n_1} & \frac{\partial f_2(n_1^*, n_2^*)}{\partial n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial n_1} & \frac{\partial f_1}{\partial n_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial n_1} & \frac{\partial f_2}{\partial n_2} \end{bmatrix}$ を**ヤコビ行列**という。

ヤコビ行列に平衡点の値を代入した行列を**コミュニティ行列**と呼ぶ。

3

線型常微分方程式の解

線型常微分方程式は解ける！

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

行列 A は定数行列

解 $h_1(t), h_2(t)$ は行列 A の固有値 λ_1, λ_2 を用いて次のように書ける

$$\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) + \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} \exp(\lambda_2 t) \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ の時}$$

$$\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} \exp(\lambda t) + \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} t \exp(\lambda t) \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \text{ の時}$$

c_{ij} はいずれも定数（初期条件で決まる）

局所安定性解析では、h_1, h_2 が時間とともにゼロに収束するかしないかに注目

4

固有値と局所安定性

平衡点からの微小なずれ h_1, h_2 の時間変化は線形近似により次で与えられた

$$\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) + \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} \exp(\lambda_2 t)$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ の時
（$\lambda_1 = \lambda_2$でも同じ議論が成り立つ）

固有値が実数の時（2 つの固有値 λ_1, λ_2 は共に実数）：

$\lambda_1 < 0$ かつ $\lambda_2 < 0$ の時、ずれ h_1, h_2 はゼロに収束

λ_1, λ_2 のいずれかが正の時、ずれ h_1, h_2 は発散（線形近似が成立しなくなる）

5

$$\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) + \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} \exp(\lambda_2 t)$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ の時
（$\lambda_1 = \lambda_2$でも同じ議論が成り立つ）

固有値が複素数の時（2 つの固有値は複素共役 $\lambda_1, \lambda_2 = a \pm b\, i$）：

$$\exp[-ix] = \cos x + i \sin x$$

$$\lim_{t\to\infty} |\exp[(a \pm ib)t]| = \lim_{t\to\infty} \exp[at] \times |\exp[\pm ibt]| \qquad |\exp[\pm ibt]| = 1$$

固有値の実部 $a = \mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_2$ が負の時、ずれ h_1, h_2 はゼロに収束

固有値の実部 a が正の時、ずれ h_1, h_2 は発散（線形近似が成立しなくなる）

6

まとめ

一般に多変数の常微分方程式の平衡点の安定性は、コミュニティ行列の
固有値で決まる。

$$\frac{dn_1}{dt} = f_1(n_1, n_2)$$
$$\frac{dn_2}{dt} = f_2(n_1, n_2)$$

平衡点の近傍で
線形近似

→

平衡点からのずれに関する線型微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

コミュニティ行列 A のすべての固有値 λ に対して

$\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ であれば、平衡点は局所安定

$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ となる固有値が 1 つでも存在すれば、平衡点は不安定

固有値が複素数であれば平衡点の近傍で振動が起こる

7

Lotka Volterra の競争モデル

$$\frac{dn_1}{dt} = r_1\left(1 - \frac{n_1 + \alpha_{12} n_2}{K_1}\right) n_1 = f_1$$

$$\frac{dn_2}{dt} = r_2\left(1 - \frac{\alpha_{21} n_1 + n_2}{K_2}\right) n_2 = f_2$$

平衡点は 4 つ存在

$$(0, 0), (K_1, 0), (0, K_2), \left(\frac{K_1 - \alpha_{12} K_2}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \frac{K_2 - \alpha_{21} K_1}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}}\right)$$

ヤコビ行列 J は

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial n_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial n_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial n_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(K_1 - 2n_1 - \alpha_{12} n_2)}{K_1} r_1 & -\dfrac{\alpha_{12} n_1}{K_1} r_1 \\ -\dfrac{\alpha_{21} n_2}{K_2} r_2 & \dfrac{(K_2 - \alpha_{21} n_1 - 2n_2)}{K_2} r_2 \end{bmatrix}$$

8

平衡点 $(0, 0)$

平衡点 $(n_1{}^*, n_2{}^*) = (0, 0)$ をヤコビ行列に代入すると、コミュニティ行列は

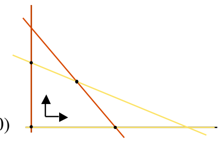
$$A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

固有値は

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - r_1 & 0 \\ 0 & \lambda - r_2 \end{vmatrix} = (\lambda - r_1)(\lambda - r_2) = 0 \quad \text{より}$$

$$\lambda = r_1, r_2 > 0$$

2 つの固有値は実数であり、共に正なので平衡点 $(0, 0)$ は不安定。



(0, 0)

平衡点 $(K_1, 0)$

平衡点 $(n_1{}^*, n_2{}^*) = (K_1, 0)$ をヤコビ行列に代入すると、コミュニティ行列は

$$A = \begin{bmatrix} -r_1 & -\alpha_{12} r_1 \\ 0 & \left(1 - \dfrac{\alpha_{21} K_1}{K_2}\right) r_2 \end{bmatrix}$$

固有値は

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + r_1 & 0 \\ 0 & \lambda - \left(1 - \dfrac{\alpha_{21} K_1}{K_2}\right) r_2 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda + r_1)(\lambda - \left(1 - \frac{\alpha_{21} K_1}{K_2}\right) r_2) = 0$$

$$\lambda = -r_1 < 0,\ (1 - \alpha_{21} K_1 / K_2) r_2$$

$K_2 < \alpha_{21} K_1$ の時　　平衡点 $(K_1, 0)$ は局所的に安定

$K_2 > \alpha_{21} K_1$ の時　　平衡点 $(K_1, 0)$ は不安定

平衡点 $(0, K_2)$

平衡点 $(n_1{}^*, n_2{}^*) = (0, K_2)$ をヤコビ行列に代入すると、コミュニティ行列は

$$A = \begin{bmatrix} \left(1 - \dfrac{\alpha_{12} K_2}{K_1}\right) r_1 & 0 \\ -\alpha_{21} r_2 & -r_2 \end{bmatrix}$$

固有値は

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \left(1 - \dfrac{\alpha_{12} K_2}{K_1}\right) r_1 & 0 \\ \alpha_{21} r_2 & \lambda + r_2 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda + r_2)(\lambda - \left(1 - \frac{\alpha_{12} K_2}{K_1}\right) r_1) = 0$$

$$\lambda = -r_2 < 0,\ (1 - \alpha_{12} K_2 / K_1) r_1$$

$K_1 < \alpha_{12} K_2$ の時　　平衡点 $(0, K_2)$ は局所的に安定

$K_1 > \alpha_{12} K_2$ の時　　平衡点 $(0, K_2)$ は不安定

内部平衡点

平衡点 $(n_1{}^*, n_2{}^*) = \left(\dfrac{K_1 - \alpha_{12} K_2}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \dfrac{K_2 - \alpha_{21} K_1}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}}\right)$ をヤコビ行列に代入すると、

コミュニティ行列 A を得る

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{(-K_1 + \alpha_{12} K_2)}{(1 - \alpha_{12}\alpha_{21}) K_1} r_1 & \dfrac{(-K_1 + \alpha_{12} K_2)}{(1 - \alpha_{12}\alpha_{21}) K_1} \alpha_{12} r_1 \\ \dfrac{(\alpha_{21} K_1 - K_2)}{(1 - \alpha_{12}\alpha_{21}) K_2} \alpha_{21} r_2 & \dfrac{(\alpha_{21} K_1 - K_2)}{(1 - \alpha_{12}\alpha_{21}) K_2} r_2 \end{bmatrix}$$

行列 A の固有値 λ の実部の符号で安定性が決まる

行列 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の固有値（実数を含む）の実部が負であるための

必要十分条件は $\boxed{T<0 \text{ かつ } D>0}$　$T=\mathrm{trace}\,A=a+d$, $D=\det A=ad-bc$

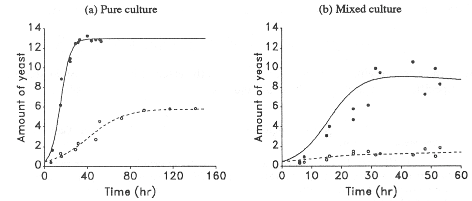
Lotka Volterra 競争モデルの

内部平衡点が正、かつ $K_1>\alpha_{12}K_2,\ K_2>\alpha_{21}K_1$ の時、上記の条件を満たす

$\longrightarrow$ 内部平衡点は局所的に安定

13

具体例



単独培養 pure culture のデータからパラメータ値を推定

Figure 10.3 Gause yeast data with logistic curves fitted to growth in pure cultures and the Lotka–Volterra two species competition model fitted to growth in mixed culture. *Saccharomyces cerevisiae* (solid line); *Schizosaccharomyces kephir* (broken line).

Saccharomyces cerevisiae : $r_1=0.218\ \mathrm{h}^{-1},\ K_1=13.0,\ \alpha_{12}=3.15$

Schizosaccharomyces kephir : $r_2=0.061\ \mathrm{h}^{-1},\ K_2=5.8,\ \alpha_{21}=0.439$

$K_1/\alpha_{12}=4.127<\ K_2=5.8$

$K_2/\alpha_{21}=13.212>\ K_1=13.0$

⇨ *Saccharomyces* は絶滅する。もしくは、初期値に依存してどちらかが絶滅する可能性

14

変数のスケール変換

ダイナミクス（微分方程式・差分式等）の解析においては、変数を適当にスケール変換してから、問題に取り組む方が見通しが良い。

例えば、Lotka Volterra の競争モデル

$$\frac{dn_1}{dt}=r_1\left(1-\frac{n_1+\alpha_{12}n_2}{K_1}\right)n_1$$

$$\frac{dn_2}{dt}=r_2\left(1-\frac{\alpha_{21}n_1+n_2}{K_2}\right)n_2$$

$$\frac{n_1}{K_1}\to u_1,\ \frac{n_2}{K_2}\to u_2,\ r_1t\to\tau$$

$$\alpha_{12}\frac{K_2}{K_1}\to\beta_{12},\ \alpha_{21}\frac{K_1}{K_2}\to\beta_{21}$$

と置き換えると

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{du_1}{d\tau}&=(1-u_1-\beta_{12}u_2)u_1\\ \frac{du_2}{d\tau}&=\rho(1-\beta_{21}u_1-u_2)u_2\end{aligned}}$$

を得る。元の変数とパラメータを定数倍しただけなので、定性的な性質は保持されている。
パラメータ数が少ない分、計算間違いが減る。
解析の見通しが良い。

15

問題 1

次の微分方程式の解を求めよ。初期値は $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$ とする。

1) $$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}\mathbf{x}$$

2) $$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}$$

3) $$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}$$

16

問題 2

次の Lotka Volterra 競争モデルについて、設問に答えよ

$$\frac{dn_1}{dt} = 0.5\left(1 - \frac{n_1 + 0.5n_2}{90}\right)n_1$$

$$\frac{dn_2}{dt} = \left(1 - \frac{n_1 + n_2}{200}\right)n_2$$

1）平衡点をすべて求めよ
2）すべての平衡点の局所安定性を判定せよ
3）相平面解析により、系の振る舞いを視覚的に調べよ
4）数値計算により、系の振る舞いを概観せよ

問題 3

行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の固有値（実数を含む）の実部が負であるための

必要十分条件は $T < 0$ かつ $D > 0$ であることを示せ（a, b, c, d は実数とする）。

$$T = \mathrm{trace}\, A = a + d,\ D = \det A = ad - bc$$

$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix}$ を解けば良い。

固有値が実数・複素数の場合に分けて考える。