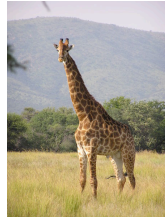


パターン形成のモデル

動物の表皮パターン



<http://www.aszoo.jp/doubutu/zoostar/1/simauna/simanna.html>



<http://ja.wikipedia.org/wiki/キリン>



http://www.bio.nagoya-u.ac.jp/~z3/research/research_1.htm

表皮模様（パターン）は、発生段階の様々な機構により生じると考えられる

多数の物質と複雑な代謝機構が関係しないと生じない現象なのか？

1

化学反応におけるパターン形成

化学反応における振動

Belousov-Zhabotinskii Reaction (BZ)

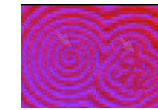
マロン酸の酸化反応 $\text{HBrO}_2, \text{Br}^-, \text{Ce}^{4+}, \text{BrO}_3^-, \text{HOBr}$

各物質濃度が周期的な変動を示す現象

http://www.uni-regensburg.de/Fakultaeten/nat_Fak_IV/Organische_Chemie/Didaktik/Keusch/D-oscill-c.htm

BZ reaction in two-dimensional medium

2次元媒体上でリング・ラセン状パターンを示す



<http://people.musc.edu/~aliev/BZ/BZexplain.html>

2

パターン形成の数理

単純なルールにより様々なパターン形成が可能

複数物質の反応と拡散がもたらすパターン

反応拡散方程式で記述されるパターン形成

物質 u, v がそれぞれ関数 f, g に従い反応すると同時に拡散するモデル

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v)$$

3

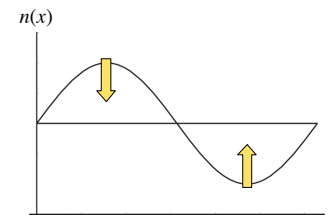
拡散の性質

拡散は、空間上の濃度変位を均す

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

濃度が高い（上に凸） --> 濃度減少

濃度が低い（下に凸） --> 濃度増加



境界上で物質の行き来が無い
反射条件下では、一様分布に収束

4

拡散不安定性

一様分布の不安定化：チューリングパターン Turing pattern

2種類の物質 u, v の反応と拡散により空間的に不均一なパターンが生じる

1) 一様解 u^*, v^* は線型安定

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v)$$

$$\frac{du}{dt} = f(u, v)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v)$$

$$\frac{dv}{dt} = g(u, v)$$

2) 拡散の働きにより一様解が不安定化し不均一パターンが生じる

5

拡散不安定が起こる条件

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v)$$

一様解からの摂動に関する線型近似

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v)$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u(t, x) - u^* \\ v(t, x) - v^* \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w} = A \mathbf{w} + D \nabla^2 \mathbf{w} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

不安定期解が出現する条件

$$f_u + g_v < 0 \quad \text{and} \quad f_u g_v - f_v g_u > 0$$

$$\mathbf{w} = \sum_k c_k e^{\lambda t} \exp[ikx]$$

$$df_u + g_v > 0 \quad \text{and}$$

$$(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u) > 0$$

6

拡散不安定性の例1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v)$$

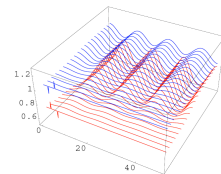
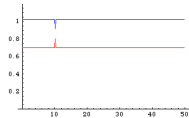
Schnakenberg kinetics:

$$f(u, v) = k_1 - k_2 u + k_3 u^2 v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v)$$

$$g(u, v) = k_4 - k_3 u^2 v$$

1次元空間上の拡散不安定



適当なパラメータを用いて安定一様解 u^*, v^* に摂動を加えると周期的パターンが生じる

7

拡散不安定性の例2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v)$$

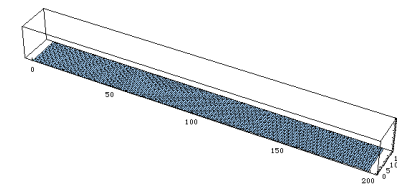
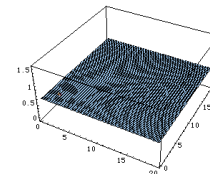
Schnakenberg kinetics:

$$f(u, v) = k_1 - k_2 u + k_3 u^2 v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v)$$

$$g(u, v) = k_4 - k_3 u^2 v$$

2次元空間上の拡散不安定



8

拡散不安定性は表皮パターンを説明できるか

拡散不安定性：2種類の物質の反応+拡散により非均一パターンが可能

単純なルールであってもパターンを産み出すことは可能

反応拡散モデルによる拡散不安定性と現実系との比較

これらの因子に対応する物質が実在するのか？

9

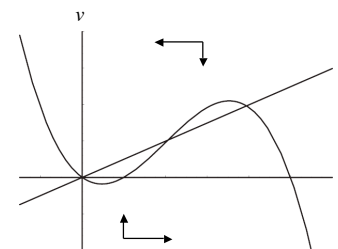
双安定ダイナミクス+拡散

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v)$$

$$f(u, v) = \frac{u(u-a)(1-u) - v}{\epsilon}$$

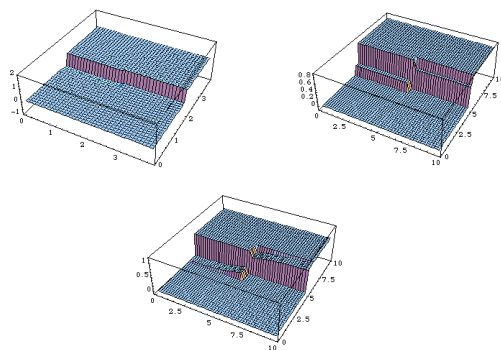
$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v)$$

$$g(u, v) = u - \gamma v$$



10

例 1



各パラメータ値、初期分布、領域サイズに依存して様々な非均一パターンが生じる

11

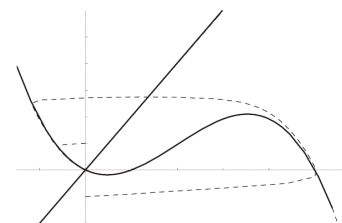
興奮性ダイナミクス+拡散

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v)$$

$$f(u, v) = \frac{u(u-a)(1-u) - v}{\epsilon}$$

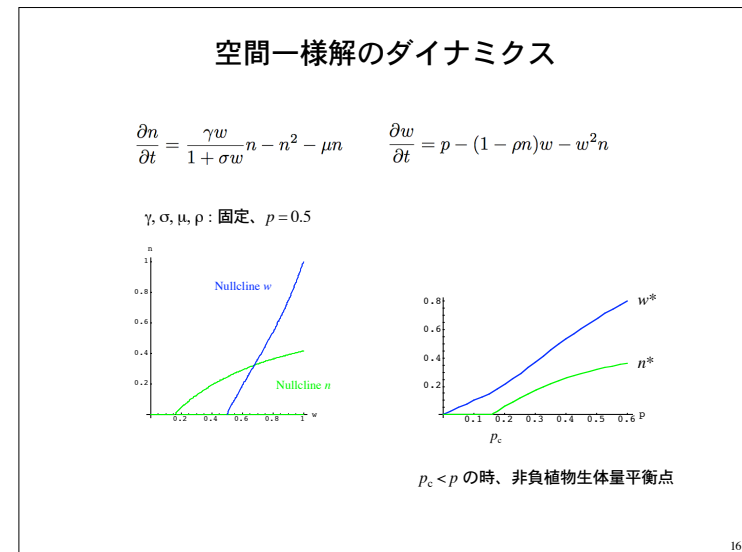
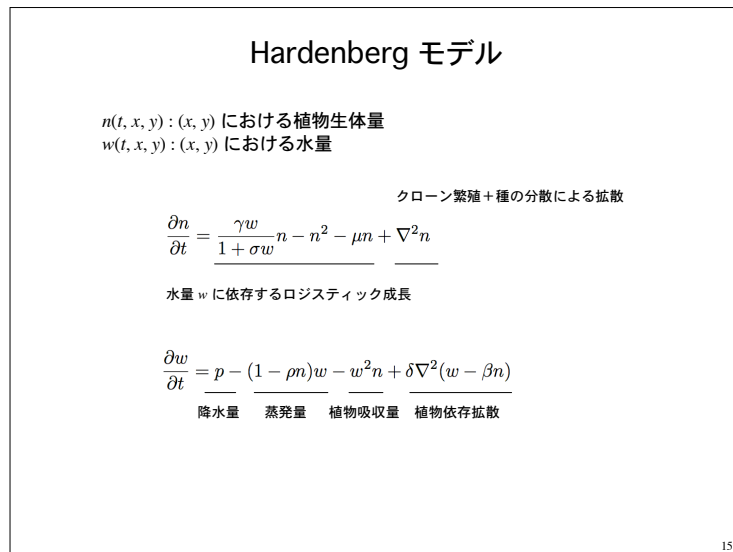
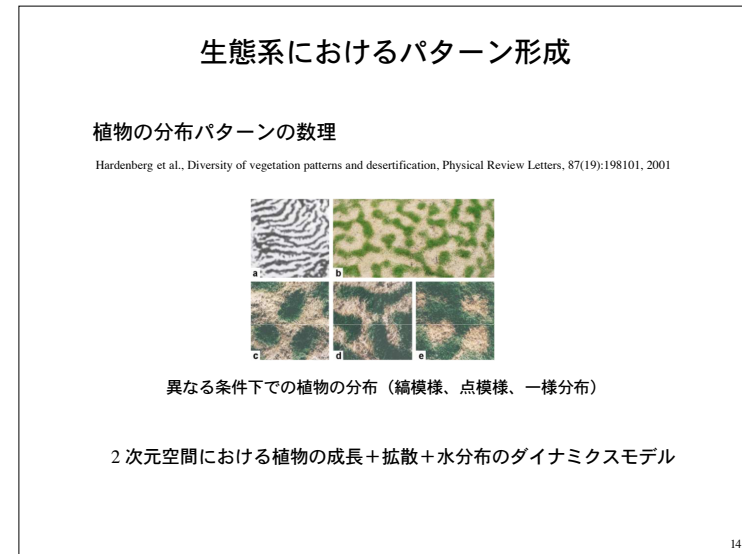
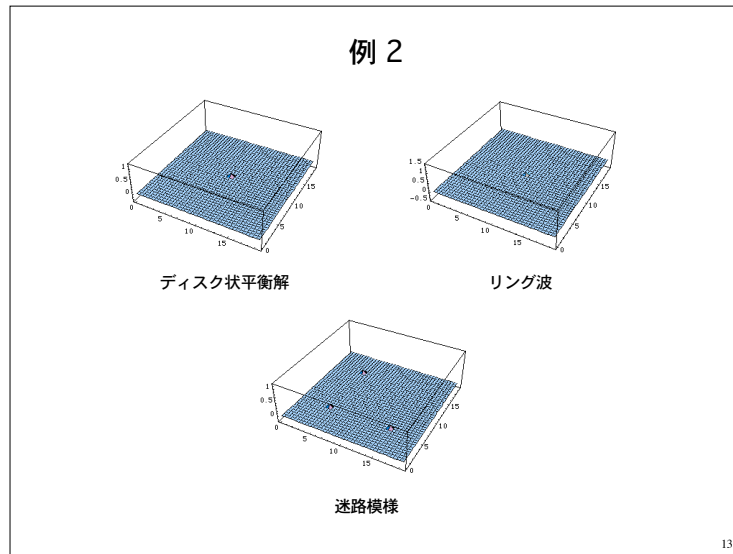
$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v)$$

$$g(u, v) = u - \gamma v$$



閾値を超える刺激により
解軌道が大きく周回する

12



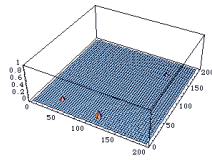
パターン形成の例 1

水の拡散は植物生体量に依存 (Cross diffusion)

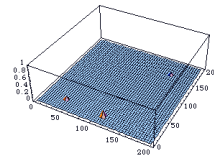
$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\gamma w}{1 + \sigma w} n - n^2 - \mu n + \nabla^2 n$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = p - (1 - \rho n)w - w^2 n + \delta \nabla^2 (w - \beta n)$$

降水量 p 大



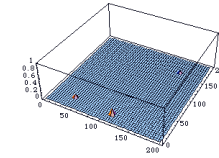
降水量 p 中



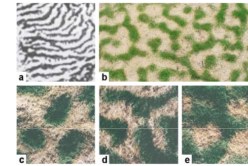
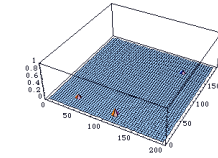
17

パターン形成の例 2

降水量 p 小



降水量 p 微小



美直に見られる植生パターンは、
植物と水の反応+拡散で説明可能か？

Hardenberg et al., Diversity of vegetation patterns and desertification, Physical Review Letters, 87(19):198101, 2001

18

パターン形成の数理解

反応拡散方程式による様々なパターン形成

自然界に見られる多種多様なパターン形成の仕組みを
統一的に理解する枠組みを提供

パターンをもたらす普遍的なメカニズムの解明

数学理論と計算機シミュレーションの融合

+現実系でパターン形成に関わる物質・代謝機構の同定

19