奈良女子大学　理学部　情報科学科

平成 18 年度　大域情報学　試験問題

2006 年 7 月 26 日実施

次の問いに答えよ。なお、解答は別紙の解答用紙に記入すること。

問 1

時刻 t における集団密度を n_t で表す離散時間モデルを考える。寿命が 1 年で世代間の重なりがない生物集団の個体群動態が次式で与えられるとき、問いに答えよ。

$$n_{t+1} = n_t e^{3-n_t} = f(n_t)$$

1. 上モデルを Cobwebbing の方法（横軸を n_t、縦軸を $n_{t+1} = f(n_t)$ とした平面上での絵解き解法）で視覚的に解け。グラフを描く際には、原点 $n_t = 0$ での関数 $f(n_t)$ の傾き並びに $\lim_{n_t \to \infty} f(n_t)$ の値に留意すること。
2. 上式の平衡点 n^* を <u>全て</u> 求めて局所安定性解析を行い、全ての平衡点は不安定であることを示せ。
3. 季節の始まりに（生物集団が繁殖を始める前に）この生物集団をある割合 p $(0 < p < 1)$ で駆除することにした。駆除後に繁殖に参加する集団密度は $(1-p)n_t$ となるので、上モデルは次のように修正される。

   $$n_{t+1} = (1-p)n_t e^{3-(1-p)n_t}$$

   非自明な平衡点 $(n^* \neq 0)$ が局所的に安定となるために必要な駆除率 p の条件を求めよ。

裏に続く。

問2

確率的に変動する環境下で増減する生物集団を考える。その生物集団は、好適な環境下では増加率が $R_{好} > 1$、不適な環境下では $0 < R_{不} < 1$ という性質を持つことが分かっている。t 年におけるこの生物集団の集団密度を N_t、その年の増加率を R_t とすると、この生物集団の個体群動態は次式で与えられる。

$$N_{t+1} = R_t N_t$$

ここで R_t は、ある確率で $R_{好}$ もしくは $R_{不}$ という値を取る確率変数である。このモデルについて問いに答えよ。

1. 初期集団密度 N_0 および増加率 $R_0, R_1, \cdots$ を用いて、T 年における集団密度 N_T を表せ。
2. 過去の記録によると、この生物集団の生息地では好適な環境と不適な環境がそれぞれ等しい確率で訪れることが分かっている。また、$R_{好} = 1.4$、$R_{不} = 0.8$ であることも知られている。十分大きな T に対し、この生物集団の 1 年当たりの増加率を求めよ。また、この生物集団の行く末について予想せよ。
3. この生物集団は害虫であった。何らかの手段を用いて不適な環境が実現する頻度を高めることで、この生物集団を根絶したい。不適な環境の頻度を p、好適な環境の頻度を $1-p$ とする時、この集団を根絶する為に必要な p を求めよ。十分永い年月 T の間に不適な環境が t 回訪れるとすると $p = t/T$ である。

問3

免疫を付与しない伝染病の動態を考える。感受性人口（感染する可能性がある人口）を S、感染人口（感染していてかつ他者を感染させ得る人口）を I とする時、両者の最も単純な動態は以下のモデルに従う。このモデルについて問いに答えよ。

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

ここで β は感染率、γ は感染者の回復率である。

1. 上モデルにおいて総人口 $N(t) = S(t) + I(t)$ は初期値 $S(0), I(0)$ で決まる定数 K に保たれることを示せ。（時間変化しないことを示せ）
2. 上モデルは、本質的には 1 変数の微分方程式に帰着することを示し、I に関する微分方程式を導け。
3. 上モデルの振る舞いを調べよ。伝染病が定着する状態（平衡状態の感染人口密度 I^* が正、$I^* > 0$）となるパラメータ β, γ, K の条件を求めよ。

試験問題は以上である。