

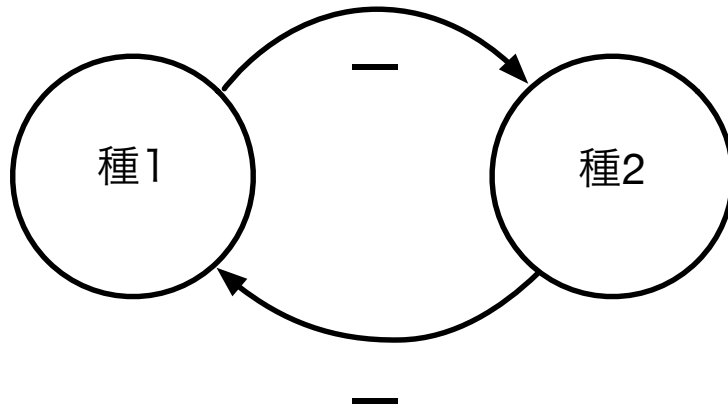
# 個体群動態の数理

奈良女子大学理学部・化学生物環境学科  
環境科学コース 高須夫悟

- ・ 科目ナンバリングコード：2223011A3
- ・ 開設科目名：個体群動態の数理
- ・ 講義コード：4802000
- ・ 開講期・曜日・時限・教室：前期 水曜日 1・2時限 情報科学講義室（G302）
- ・ 対象学生：3回生

## 2 種系のモデル

### 2 つの生物集団の関係

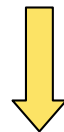


互いに負の影響を与える関係を  
**競争関係**という ( Competition )

負の影響とは、片方の存在がもう片方の存在に悪影響(増加率を低下させるなど)を及ぼすこと

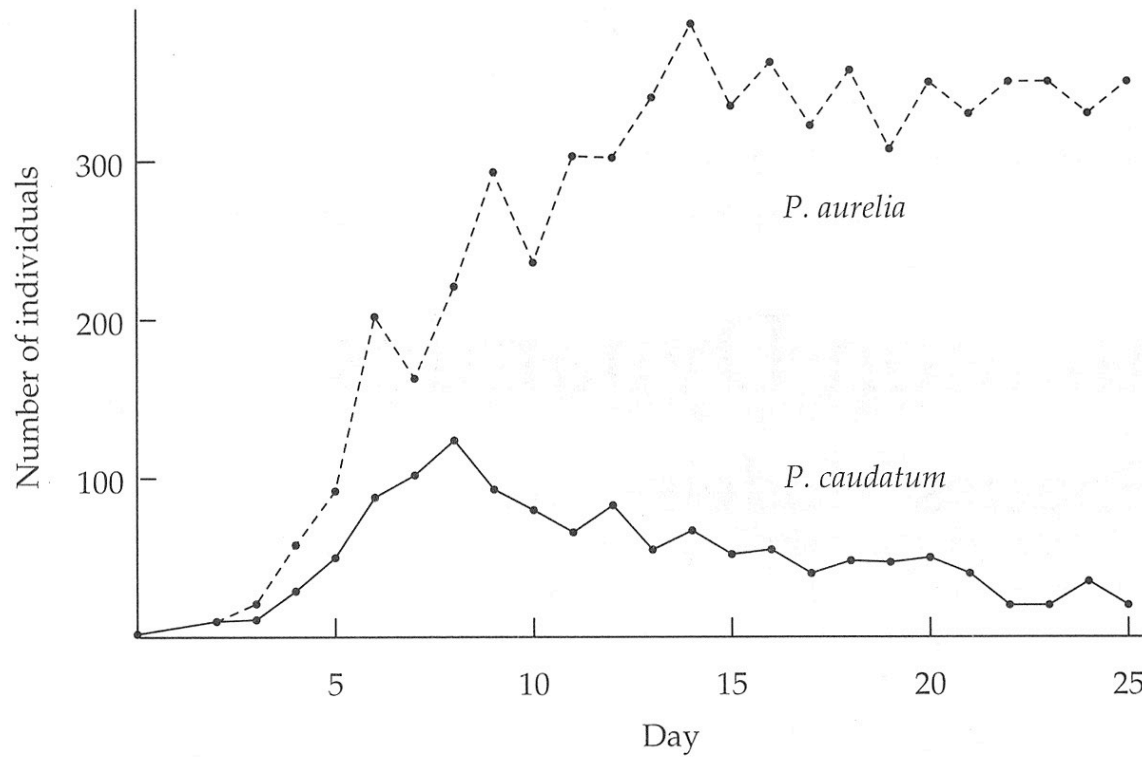
資源(餌)や生存場所を巡って競争している状況が相当する

競争関係にある 2 種の集団密度はどのように変化するのか?



2 種系の競争モデル

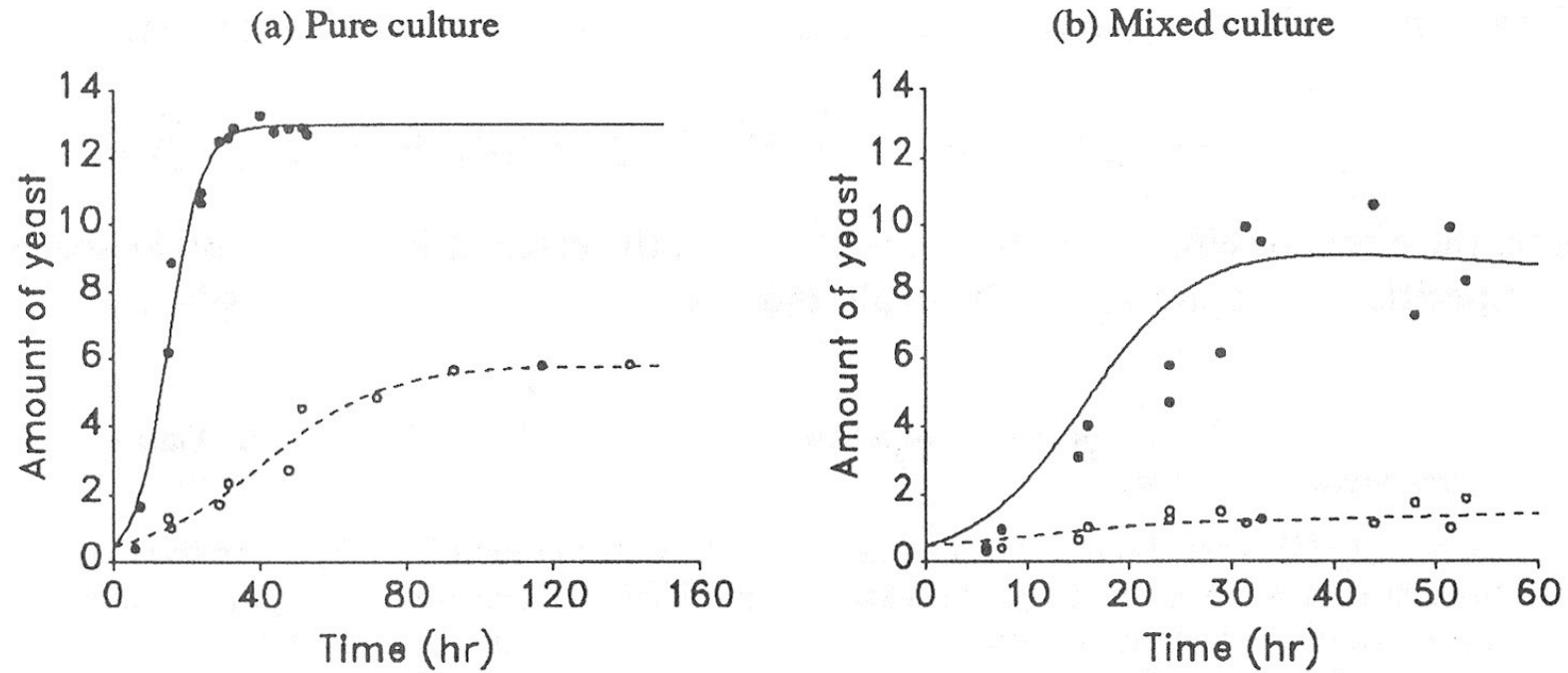
# 实例 1



**Figure 3.1.** Growth of a mixed population of *Paramecium caudatum* and *P. aurelia*.  
Source: Gause, 1934.

Bulmer 1994

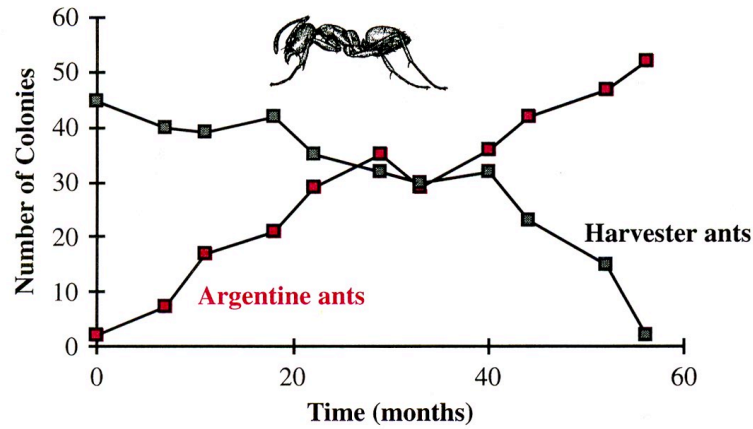
## 实例 2



**Figure 10.3** Gause yeast data with logistic curves fitted to growth in pure cultures and the Lotka–Volterra two species competition model fitted to growth in mixed culture. *Saccharomyces cerevisiae* (solid line); *Schizosaccharomyces kephir* (broken line).

Brown and Rothery 1994

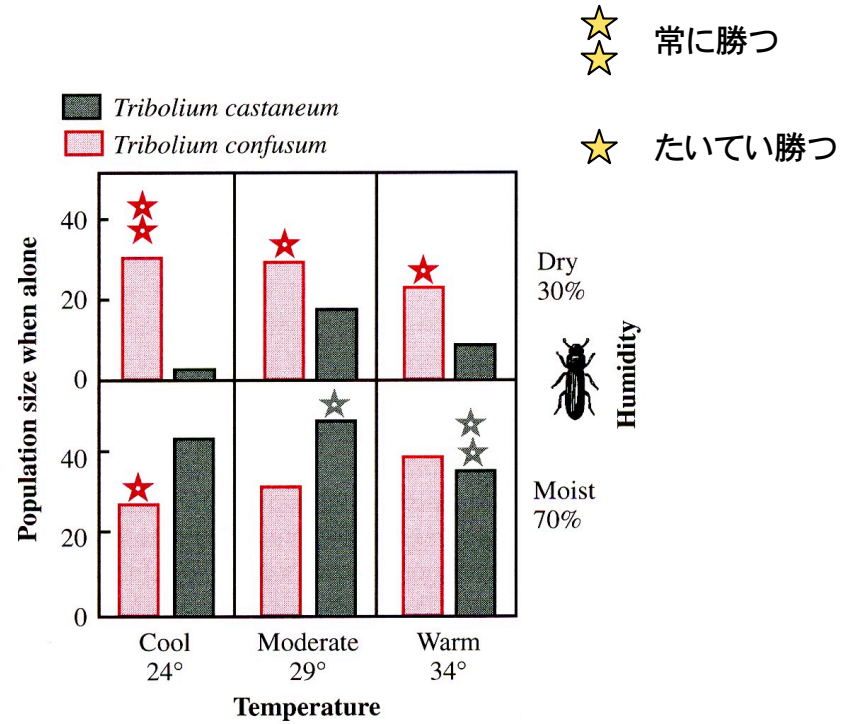
# 実例 3



Erickson 1971, Case 1999

南カリフォルニアでの蟻 2 種の競争

Argentine ants > Harvester ants



Park 1954, Case 1999

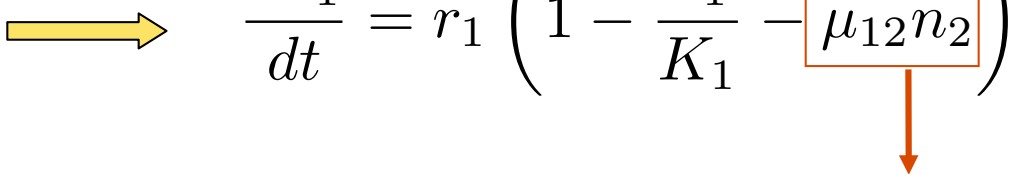
異なる環境下では勝ち負けが異なる

*T. castaneum* < > *T. confusum*

## 2 種系の競争モデル

それぞれの集団の個体密度を  $n_1, n_2$  とする

1 種系のロジスティック増殖のように、集団の増加率が競争相手の個体密度に比例して減少する場合を考える

$$\frac{dn_1}{dt} = r_1 \left( 1 - \frac{n_1}{K_1} \right) n_1 \quad \longrightarrow \quad \frac{dn_1}{dt} = r_1 \left( 1 - \frac{n_1}{K_1} - \boxed{\mu_{12}n_2} \right) n_1$$


種 2 が存在することによる  
種 1 の増加率の低下

$\mu_{12} > 0$ : 種 2 が種 1 に及ぼす種間競争の程度を表す

種 2 の個体密度の変化も同様に考える

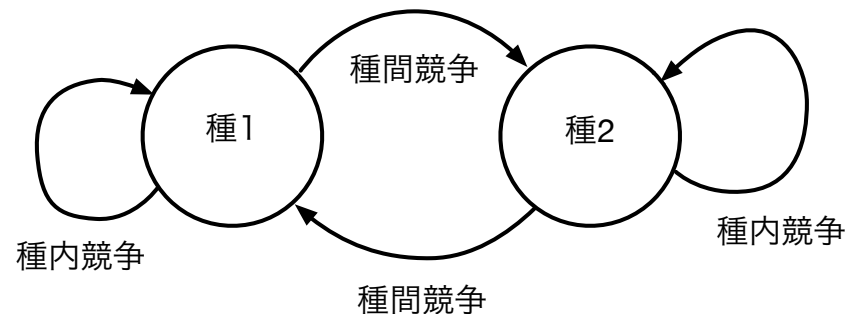
# Lotka Volterra の競争モデル

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} &= r_1 \left( 1 - \frac{n_1}{K_1} - \mu_{12}n_2 \right) n_1 & \longrightarrow & \frac{dn_1}{dt} = r_1 \left( 1 - \frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} \right) n_1 \\ \frac{dn_2}{dt} &= r_2 \left( 1 - \mu_{21}n_1 - \frac{n_2}{K_2} \right) n_2 & & \frac{dn_2}{dt} = r_2 \left( 1 - \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} \right) n_2 \end{aligned}$$

Lotka Volterra の競争モデル

$\alpha_{ij}$  : 種  $j$  が種  $i$  に及ぼす種間競争係数

種間競争係数  $\alpha$  は、自身に対する種内競争係数の強さ  $1/K$  が単位



# Lotka Volterra モデルの解析

2 変数の非線形微分方程式は一般に解析的に解くのが困難

$$\frac{dn_1}{dt} = r_1 \left( 1 - \frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} \right) n_1 \quad \frac{dn_2}{dt} = r_2 \left( 1 - \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} \right) n_2$$

グラフを用いて視覚的にモデルの振る舞いを知ることが出来る:

相平面解析 (phase plane analysis) もしくは **アイソクライン法 Isocline method**

どのような関数であっても適用が可能

下準備:

横軸に  $n_1$ 、縦軸に  $n_2$  の平面 (相平面) をとり、時間微分がゼロとなる線を引く。

時間微分がゼロとなる線を **ヌルクライン null-cline** という。

$$\frac{dn_1}{dt} = 0 \quad \text{を満たすものが } n_1 \text{ のヌルクライン}$$

$$\frac{dn_2}{dt} = 0 \quad \text{を満たすものが } n_2 \text{ のヌルクライン}$$



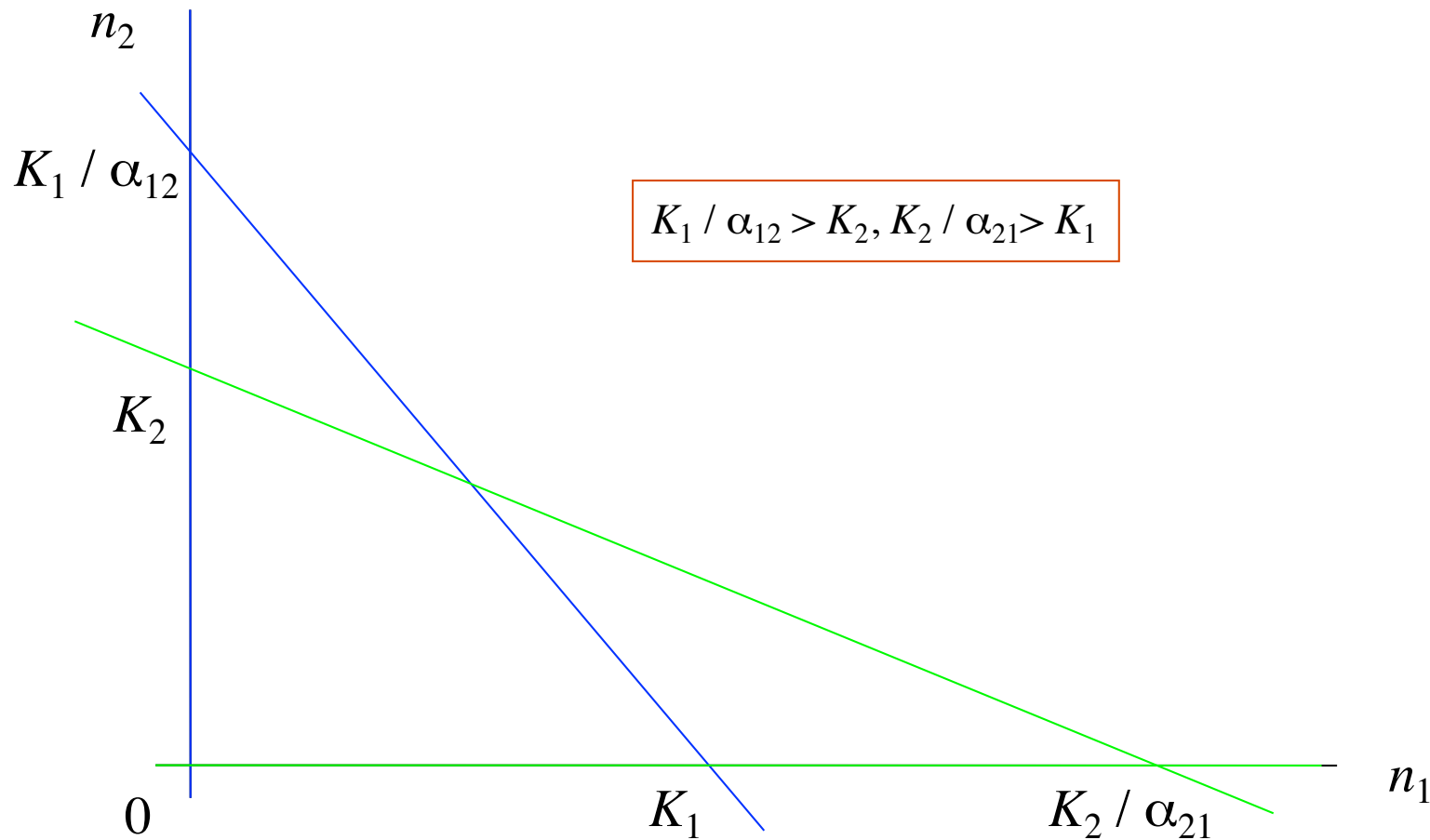
# 相平面解析

$n_1$  のヌルクラインは

$$\frac{dn_1}{dt} = r_1 \left( 1 - \frac{n_1}{K_1} - \mu_{12}n_2 \right) n_1 = 0 \longrightarrow n_1 = 0, \frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} = 1$$

$n_2$  のヌルクラインは

$$\frac{dn_2}{dt} = r_2 \left( 1 - \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} \right) n_2 = 0 \longrightarrow n_2 = 0, \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} = 1$$

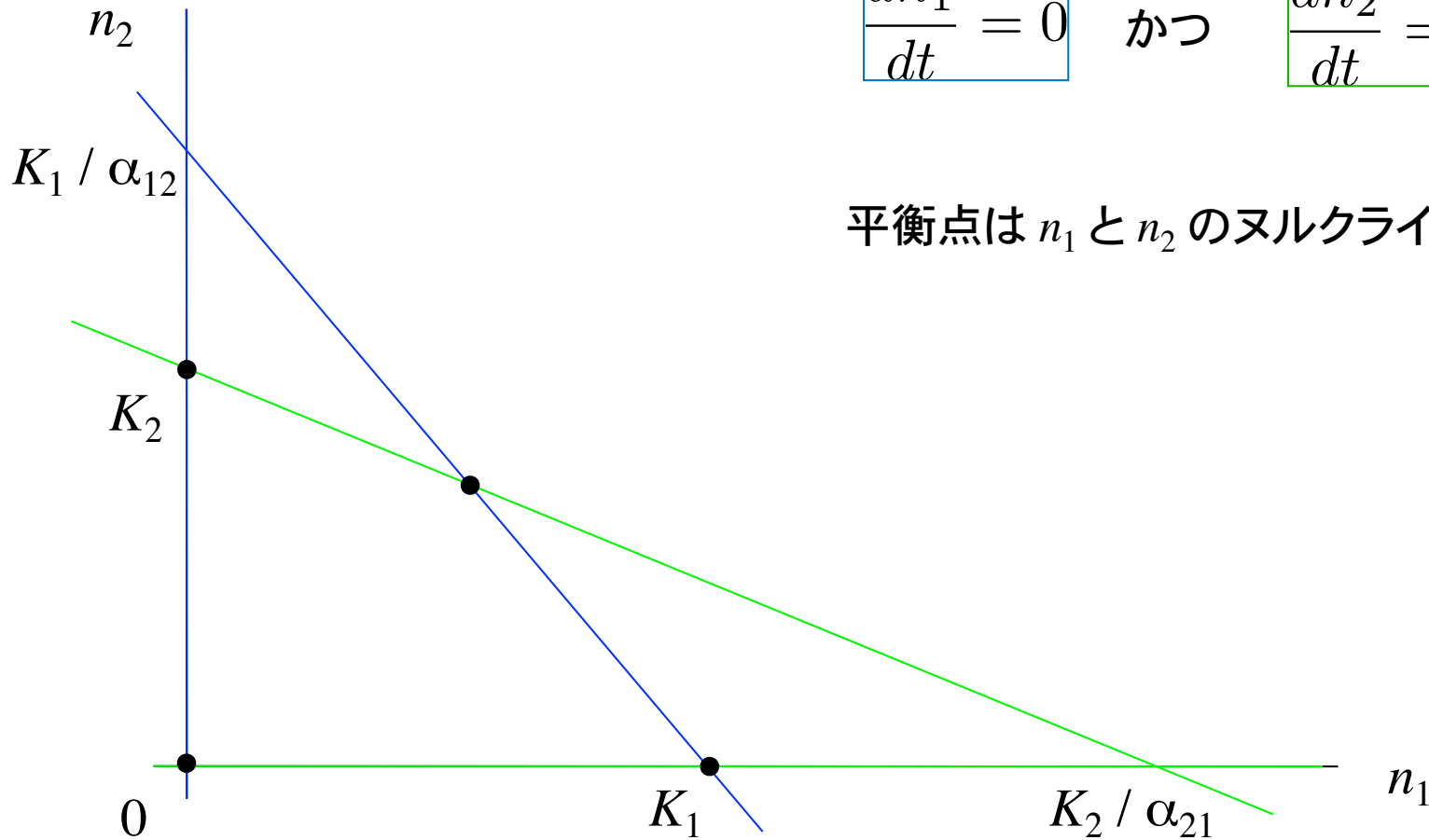


# 平衡点

時間的に変化しない点を平衡点という。

$$\frac{dn_1}{dt} = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{dn_2}{dt} = 0$$

平衡点は  $n_1$  と  $n_2$  のヌルクラインが交わる点



# 相平面上の解軌道の向き

$$n_1 = 0, \frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} = 1$$

$$n_2 = 0, \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} = 1$$

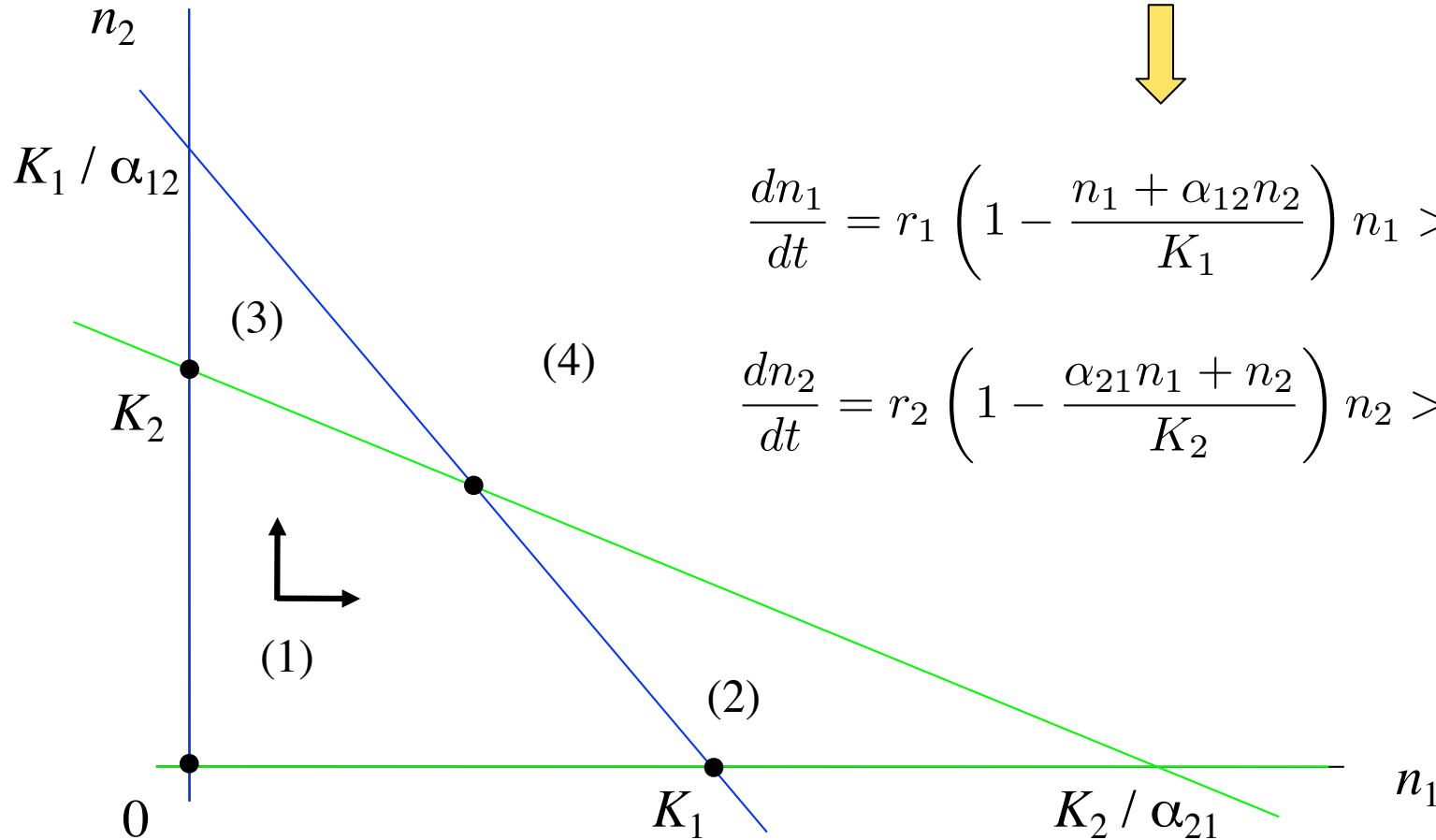
領域 (1) では、 $n_1 > 0, n_2 > 0,$

$$1 - \frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} > 0 \quad 1 - \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} > 0$$



$$\frac{dn_1}{dt} = r_1 \left( 1 - \frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} \right) n_1 > 0 \Rightarrow n_1 \text{ は増加}$$

$$\frac{dn_2}{dt} = r_2 \left( 1 - \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} \right) n_2 > 0 \Rightarrow n_2 \text{ は増加}$$



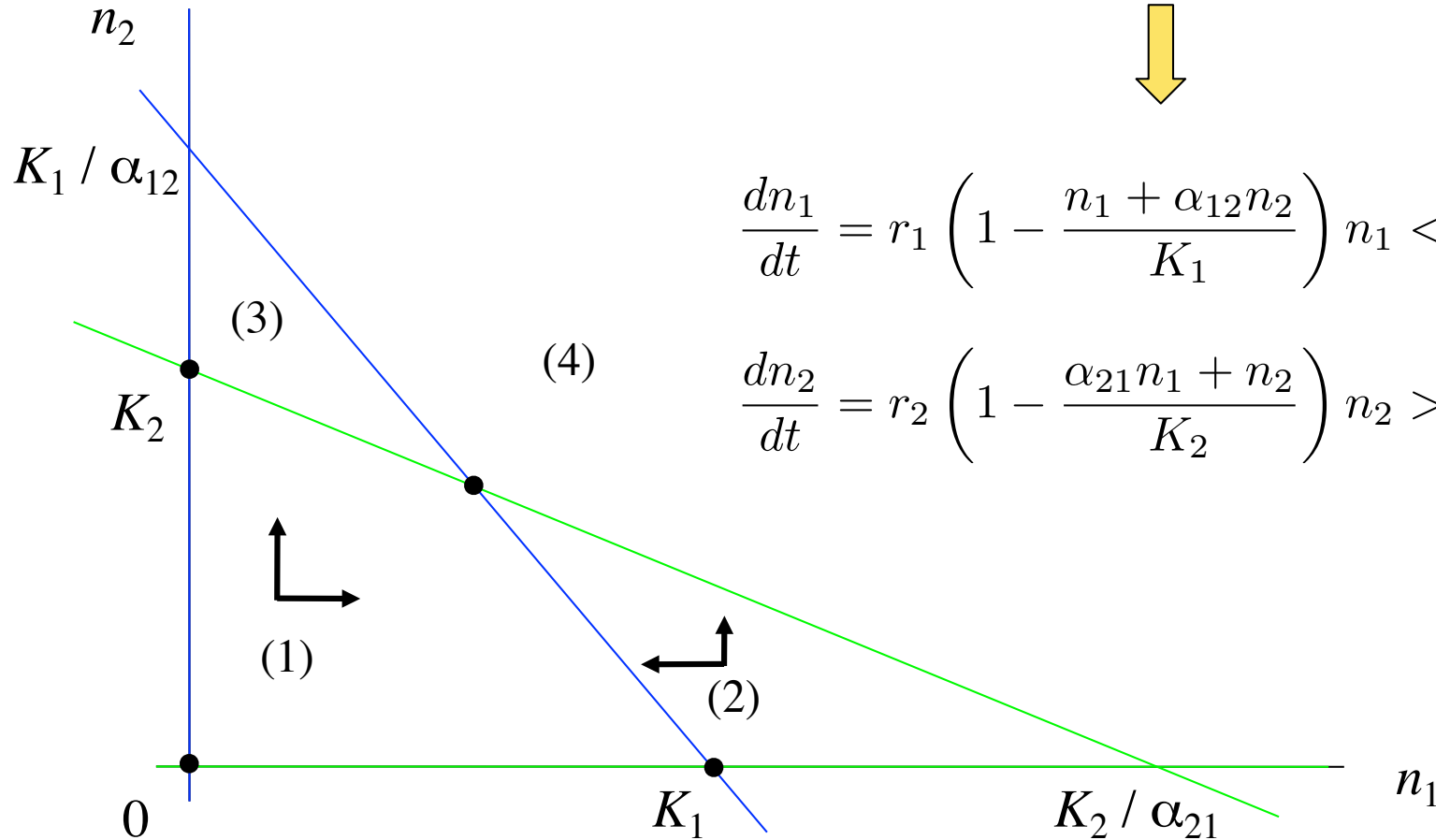
## 相平面上の解軌道の向き

$$n_1 = 0, \frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} = 1$$

$$n_2 = 0, \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} = 1$$

領域 (2) では、 $n_1 > 0, n_2 > 0,$

$$1 - \frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} < 0 \quad 1 - \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} > 0$$



$$\frac{dn_1}{dt} = r_1 \left( 1 - \frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} \right) n_1 < 0 \Rightarrow n_1 \text{ は減少}$$

$$\frac{dn_2}{dt} = r_2 \left( 1 - \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} \right) n_2 > 0 \Rightarrow n_2 \text{ は増加}$$

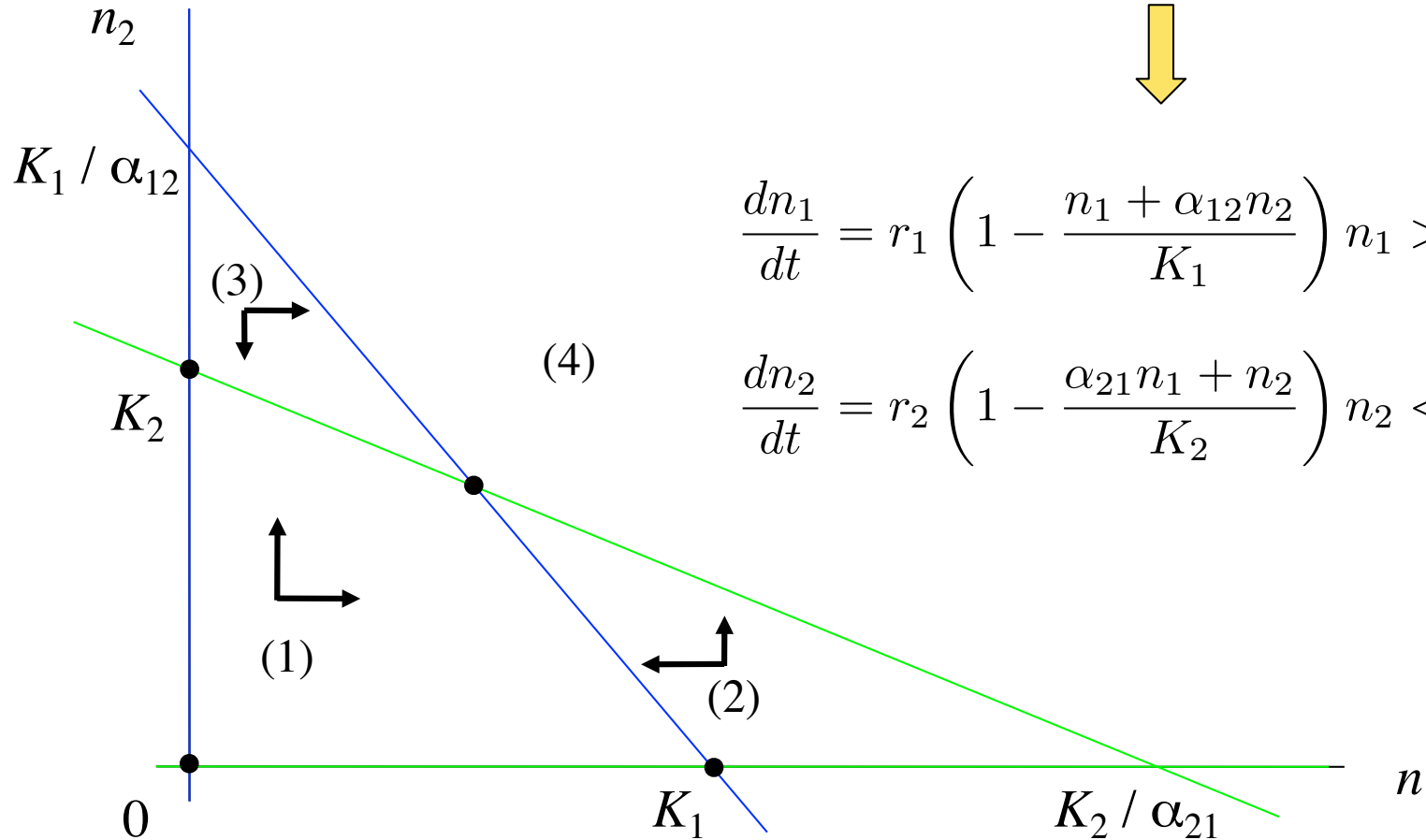
# 相平面上の解軌道の向き

$$n_1 = 0, \frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} = 1$$

$$n_2 = 0, \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} = 1$$

領域 (3) では、 $n_1 > 0, n_2 > 0,$

$$1 - \frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} > 0 \quad 1 - \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} < 0$$



$$\frac{dn_1}{dt} = r_1 \left( 1 - \frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} \right) n_1 > 0 \Rightarrow n_1 \text{ は増加}$$

$$\frac{dn_2}{dt} = r_2 \left( 1 - \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} \right) n_2 < 0 \Rightarrow n_2 \text{ は減少}$$

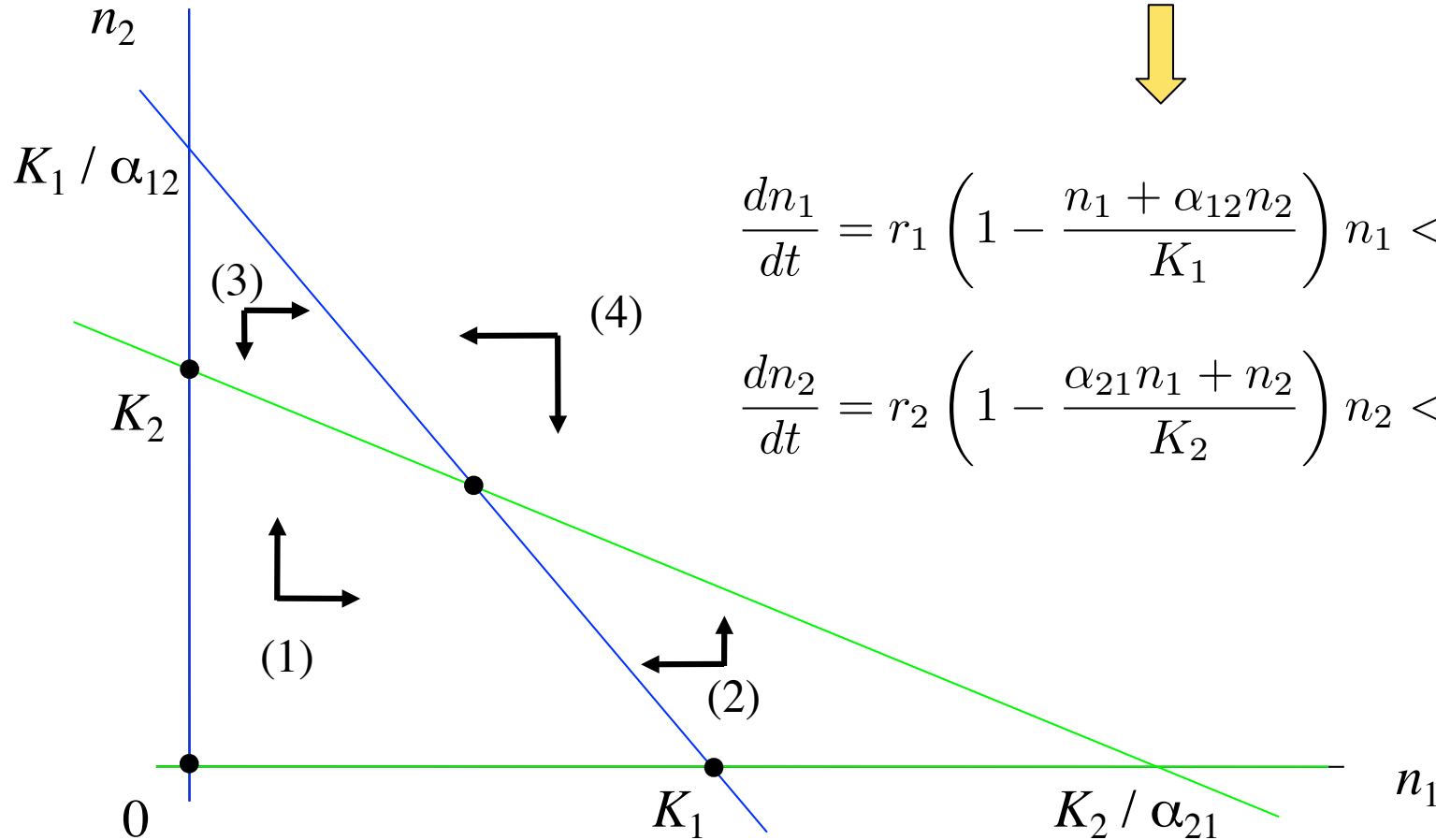
# 相平面上の解軌道の向き

$$n_1 = 0, \frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} = 1$$

$$n_2 = 0, \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} = 1$$

領域 (4) では、 $n_1 > 0, n_2 > 0,$

$$1 - \frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} < 0 \quad 1 - \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} < 0$$



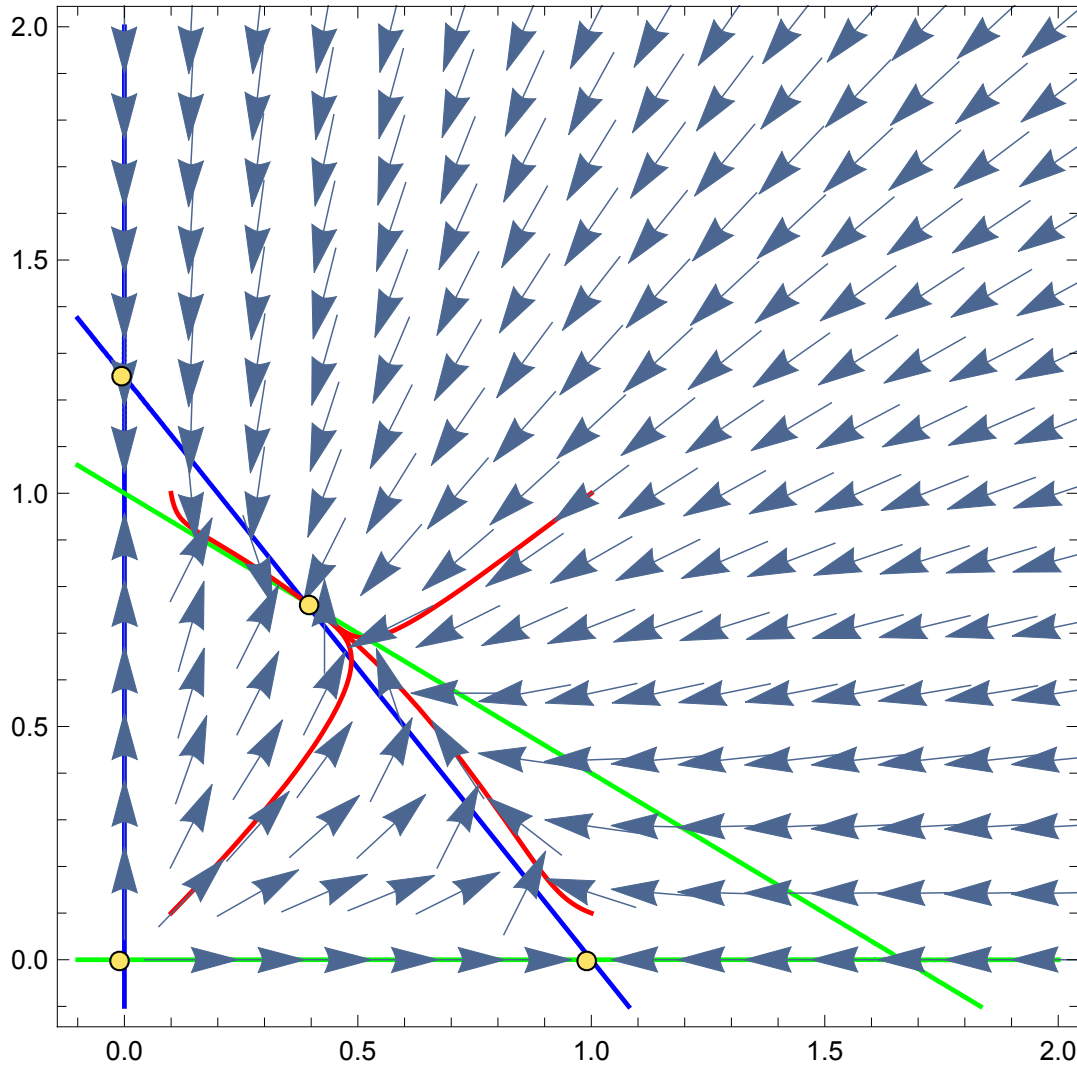
$$\frac{dn_1}{dt} = r_1 \left( 1 - \frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} \right) n_1 < 0 \Rightarrow n_1 \text{ は減少}$$

$$\frac{dn_2}{dt} = r_2 \left( 1 - \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} \right) n_2 < 0 \Rightarrow n_2 \text{ は減少}$$

# 数値計算例

矢印: 相平面上の各点における解軌道の速度  $(dn_1/dt, dn_2/dt)$  のベクトル表示

$$K_1 / \alpha_{12} > K_2, K_2 / \alpha_{21} > K_1$$



初期状態が第一象限内であれば1つの平衡点(内部平衡点)に収束

$$\frac{n_1 + \alpha_{12}n_2}{K_1} = 1 \quad \frac{\alpha_{21}n_1 + n_2}{K_2} = 1$$

$$(n_1^*, n_2^*) =$$

$$\left( \frac{K_1 - \alpha_{12}K_2}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \frac{K_2 - \alpha_{21}K_1}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}} \right)$$

解軌道は  $n_1$  のヌルクラインと必ず垂直に交わる(ヌルクライン上で  $n_1$  の時間微分はゼロ)

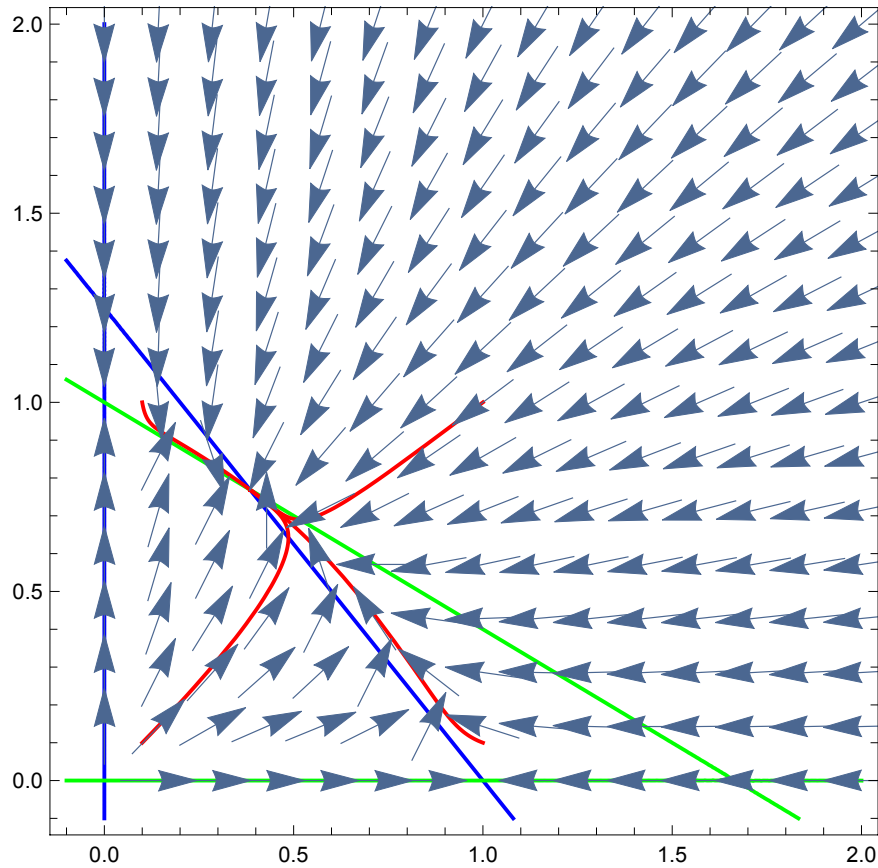
解軌道は  $n_2$  のヌルクラインと必ず水平に交わる(ヌルクライン上で  $n_2$  の時間微分はゼロ)

# 数値計算例 2

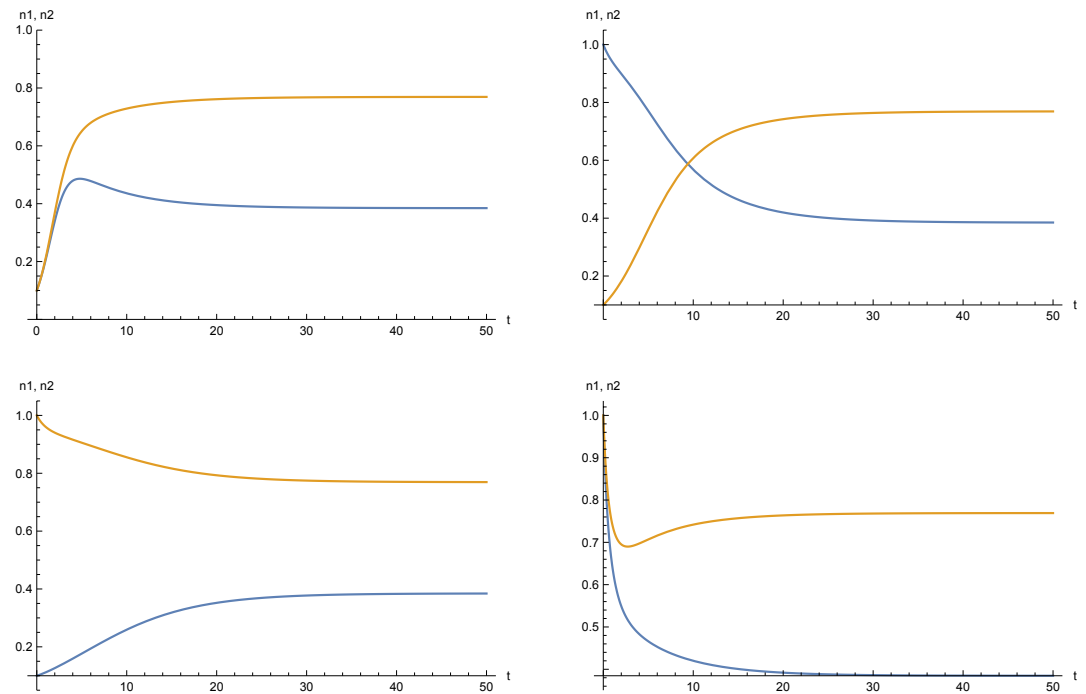
$$K_1 / \alpha_{12} > K_2, K_2 / \alpha_{21} > K_1$$

両者共存

相平面上の解軌道



時刻の関数としての個体密度

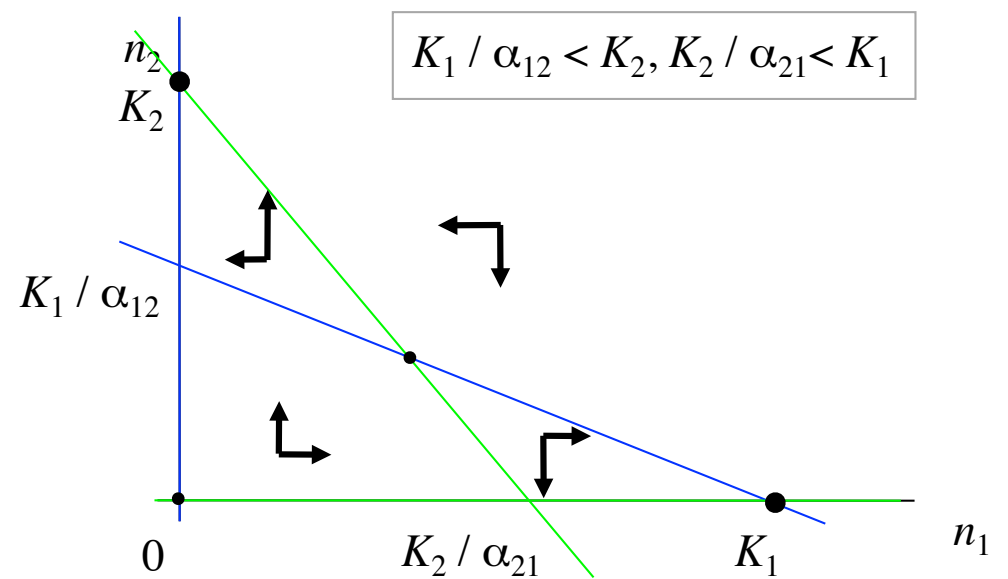
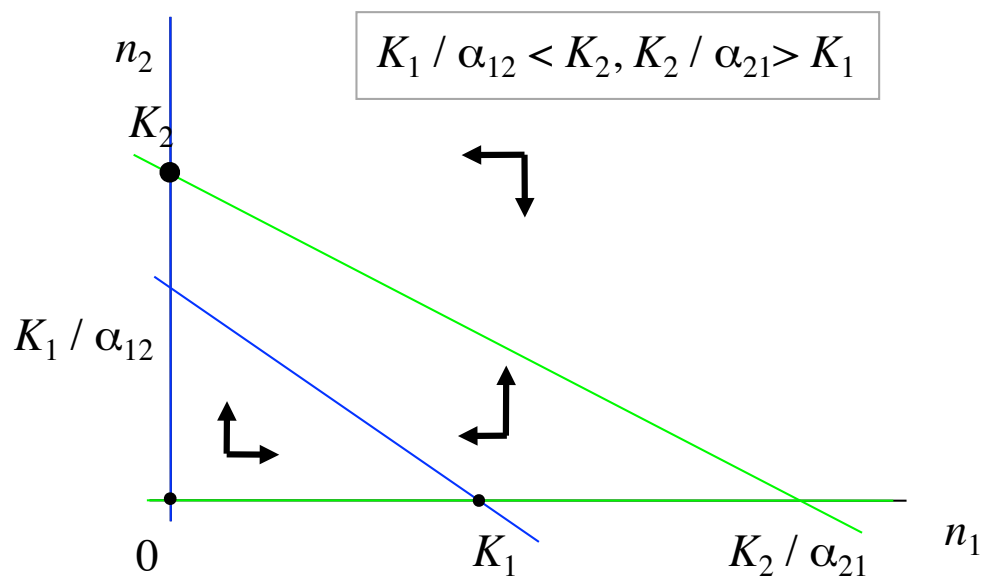
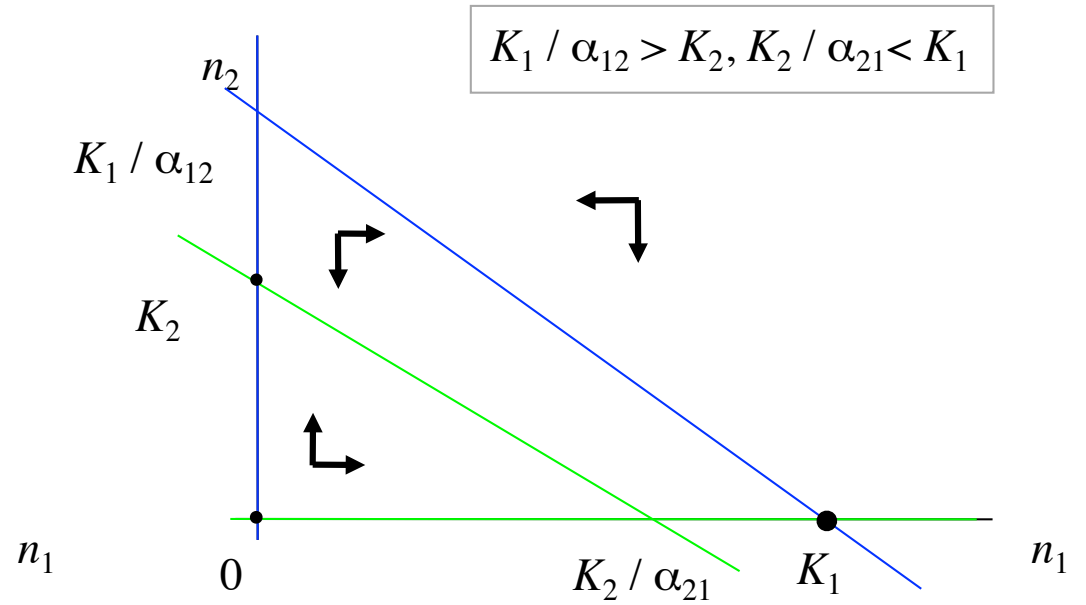
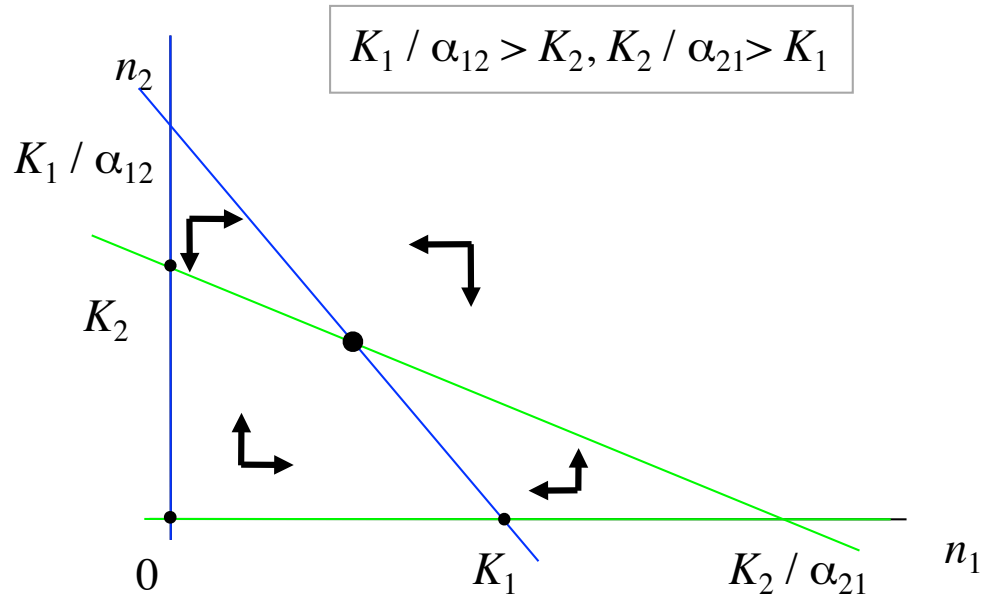


青:  $n_1(t)$

黄:  $n_2(t)$



# ヌルクラインの 4 通りの交わり型

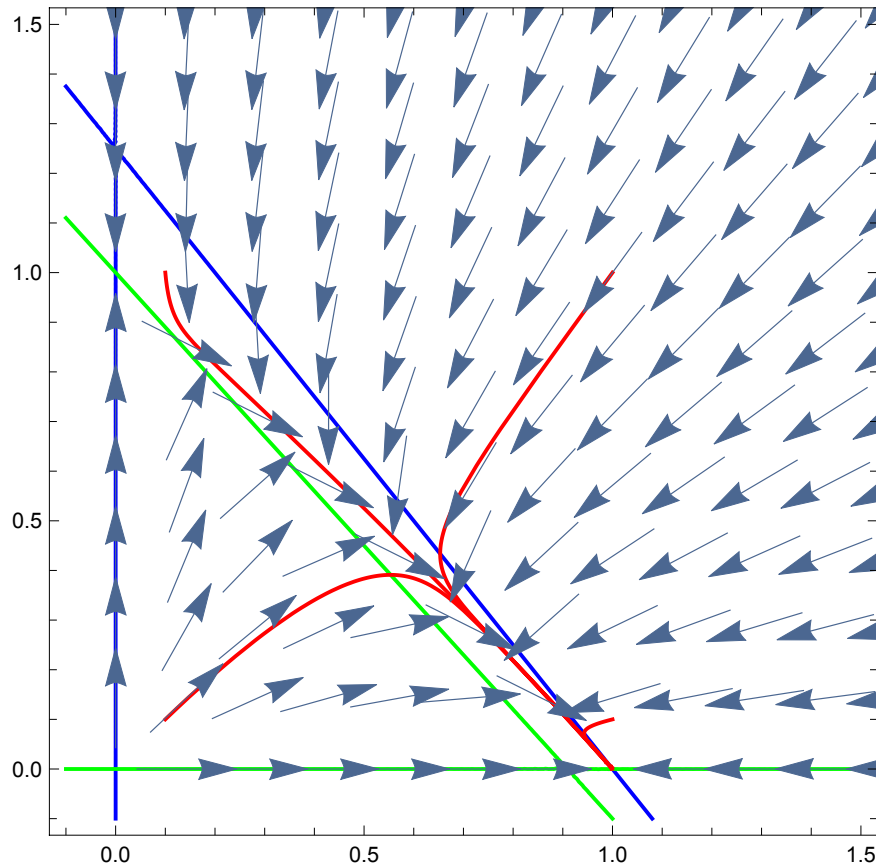


# 数値計算例 3

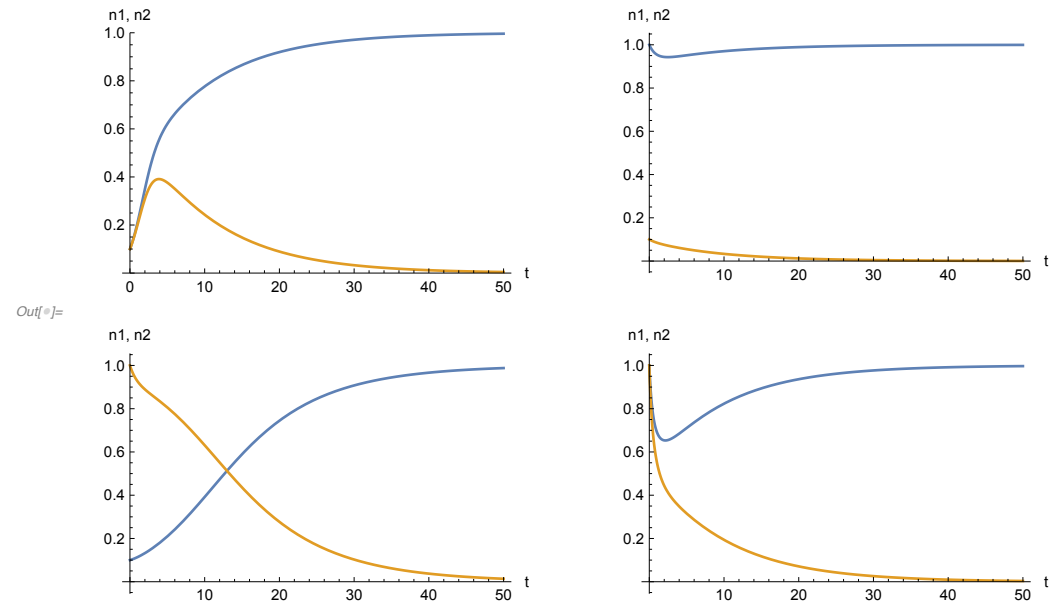
$$K_1 / \alpha_{12} > K_2, K_2 / \alpha_{21} < K_1$$

種 1 のみ生存、種 2 は絶滅

相平面上の解軌道



時刻の関数としての個体密度



青:  $n_1(t)$

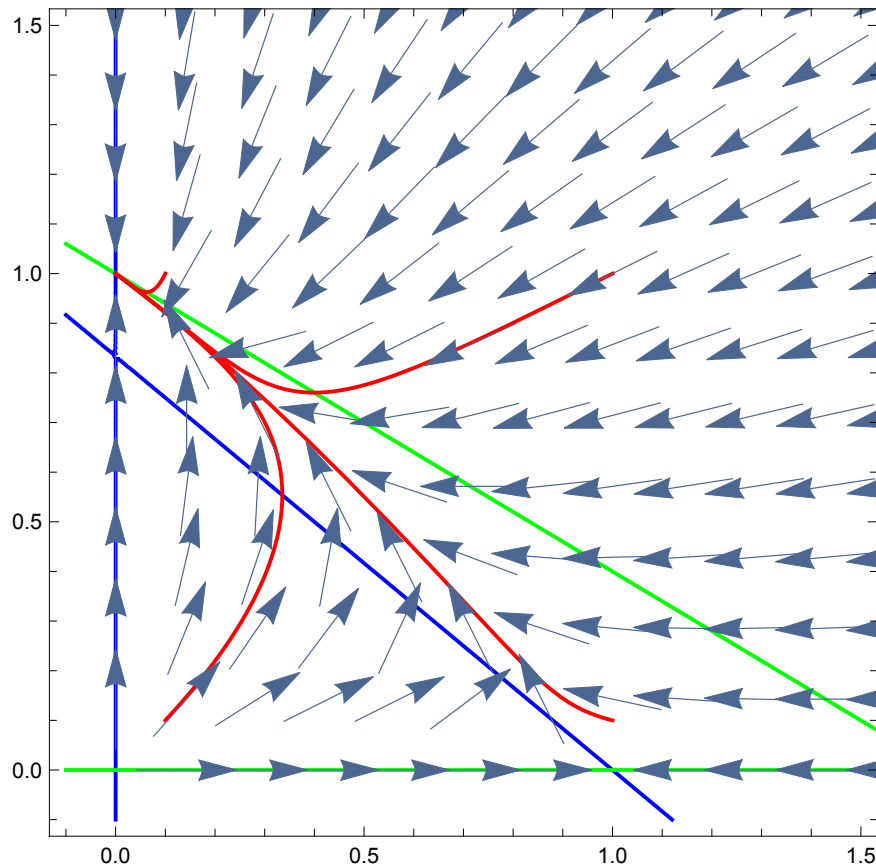
黄:  $n_2(t)$

# 数値計算例 4

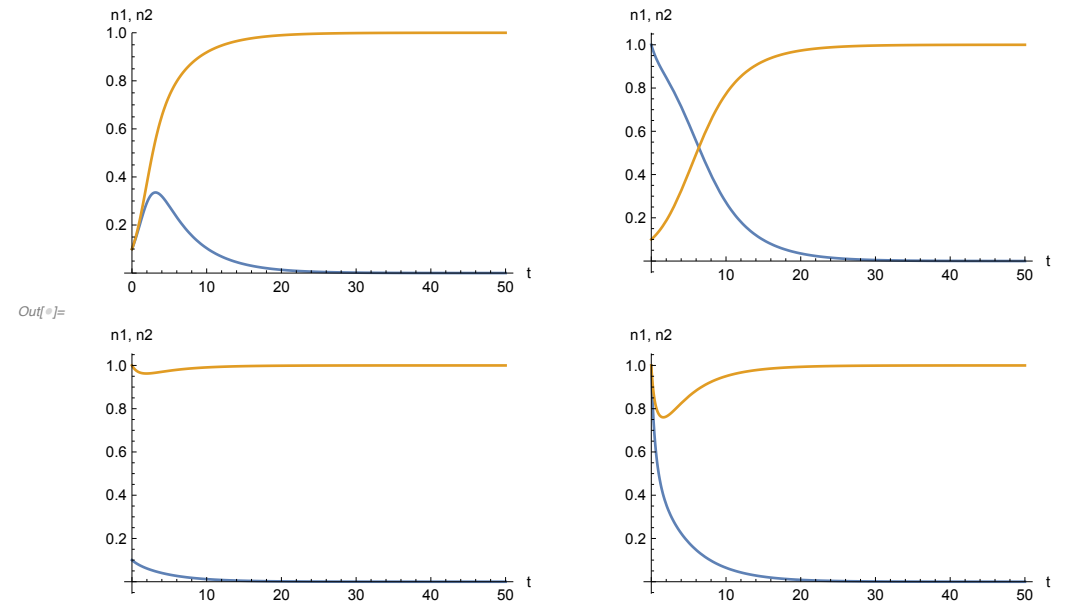
$$K_1 / \alpha_{12} < K_2, K_2 / \alpha_{21} > K_1$$

種 1 は絶滅、種 2 のみ生存

相平面上の解軌道



時刻の関数としての個体密度



青:  $n_1(t)$

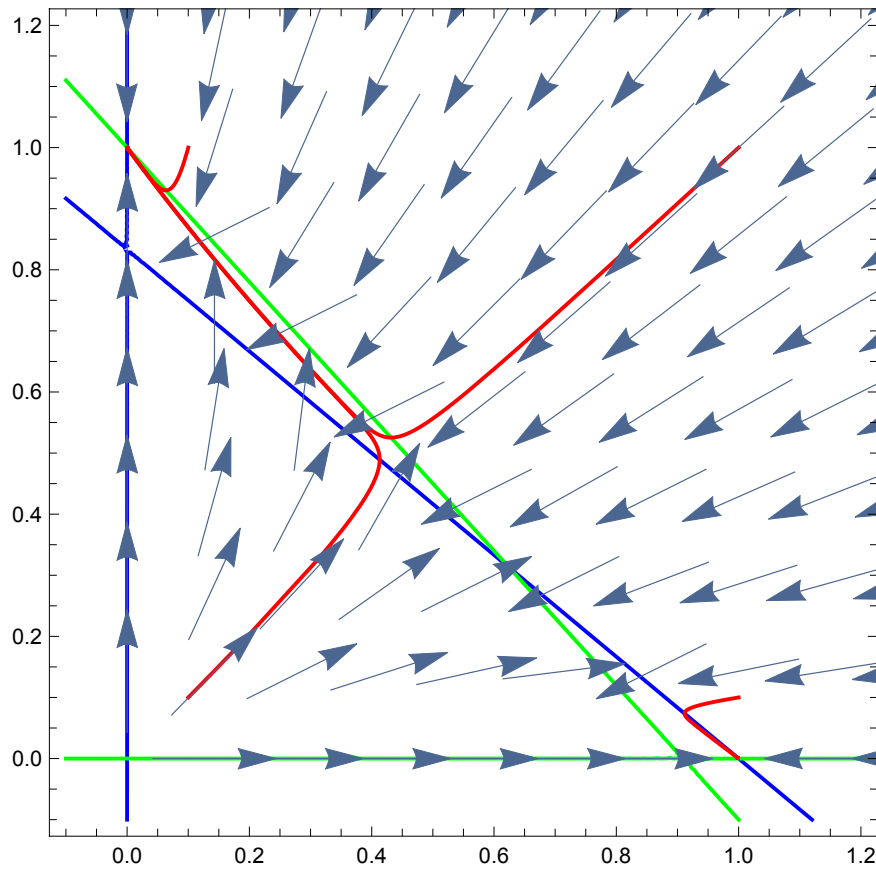
黄:  $n_2(t)$

# 数値計算例 5

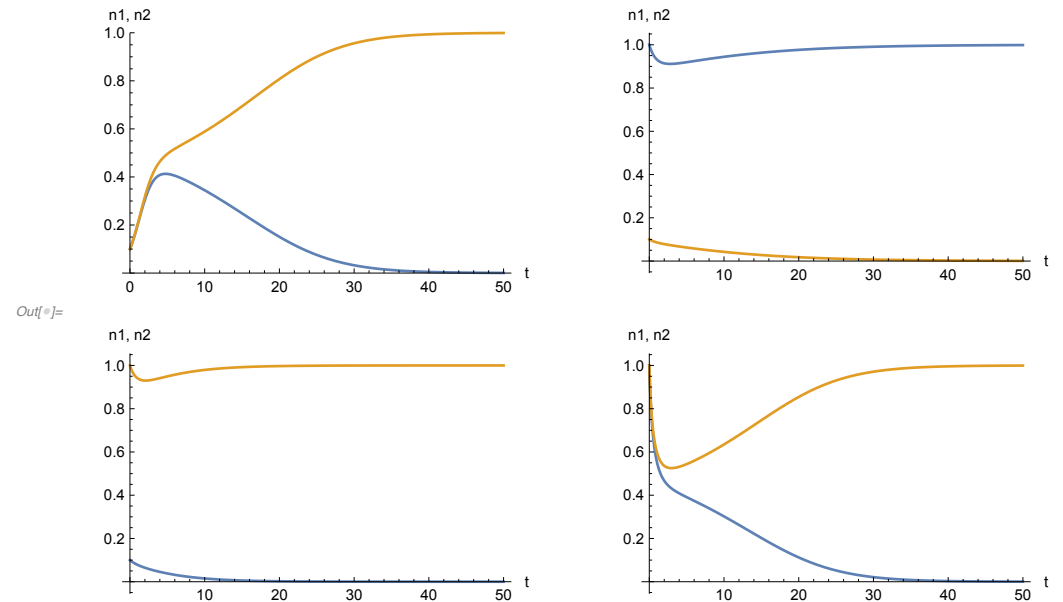
$$K_1 / \alpha_{12} < K_2, K_2 / \alpha_{21} < K_1$$

初期値に依存してどちらかが絶滅

相平面上の解軌道



時刻の関数としての個体密度



青:  $n_1(t)$

黄:  $n_2(t)$

# Lotka Volterra 競争モデルのまとめ

環境収容量  $K_1, K_2$ 、種間競争係数  $\alpha_{12}, \alpha_{21}$  に依存して次の 4 通りが可能  
 内的自然増加率  $r_1, r_2$  は無関係

	$K_1 / \alpha_{12} > K_2$	$K_1 / \alpha_{12} < K_2$
$K_2 / \alpha_{21} > K_1$	2 種共存	種 1 は絶滅 種 2 のみ
$K_2 / \alpha_{21} < K_1$	種 2 は絶滅 種 1 のみ	初期条件に依存して どちらかが絶滅

種 2 が種 1 に及ぼす種間競争係数  $\alpha_{12}$  が大きいと、種 1 は絶滅

種 1 が種 2 に及ぼす種間競争係数  $\alpha_{21}$  が大きいと、種 2 は絶滅

2 種が共存するのは、種間競争係数  $\alpha_{12}, \alpha_{21}$  が小さいときに限る(相手に干渉しすぎない)

# 競争排除則

同じ環境下で同じ資源要求を持つ複数の種は共存できない、という多くの系で経験的に知られている事実(経験則)がある

ゾウリムシの増殖を観察したガウゼ Gause にちなんで、**ガウゼの競争排他律**、ともいわれる

Lotka Volterra の競争モデルは、**競争排除則**が起こることを示している

共存するためには、種間競争の効果の方が、種内競争(自己抑制効果)の効果よりも小さくなくてはならない。

競争系における種の多様性維持の問題

多種の生物が共存しているのは資源要求が互いに異なるためか?

このモデルでは考慮されていない他の要因によるのか?