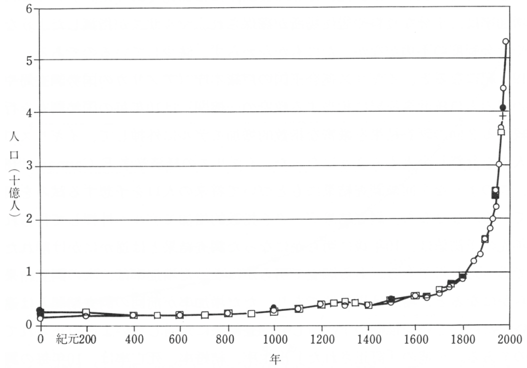
地球全体の人口はほぼ一貫して増加し続けている



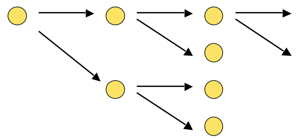
では、どのように人口は増加してきたのか？

人口動態のモデル

モデル：複雑な現象をより良く理解するための理想状況

数理モデル：理想化された状況を数式で記述したもの

各個体が一定の時間間隔毎に同期して分裂して 2 個体になる過程を繰り返す仮想的な生物集団



時刻 t　0　1　2　3

個体数の時間変化

時刻 t での個体数を N_t と書くと、単位時間に 1 個体は 2 個体に分裂

$$N_{t+1} = 2N_t$$

単位時間内に同期して 2 個体に分裂するという仮定に基づくモデル

初期個体数が N_0 のとき、　$N_t = N_0 2^t$

より一般的に、1 個体が単位時間に r 倍に増殖すると仮定すれば、

$$N_{t+1} = rN_t \qquad N_t = N_0 r^t$$

個体数〜個体密度

厳密には生物の個体数は非負の整数値。

単位面積あたりの個体密度を考えればゼロもしくは正の実数。

個体密度に注目したダイナミクスを考える。

単位時間後の個体密度 N_{t+1} が前年の密度 N_t の関数で決まる場合

$$N_{t+1} = f(N_t)$$

生き物の増え方に依存して関数 f の概型は異なる

指数モデル

単位時間内に各個体が b 個体の子供を生み、生存確率 s で生き延びる仮想的な生物集団

$$N_{t+1} = \underbrace{bN_t}_{\text{集団に新たに加わる個体数}} + \underbrace{sN_t}_{\text{生き残る個体数}} = \underbrace{(b+s)}_{\text{正味の増加率}}N_t$$

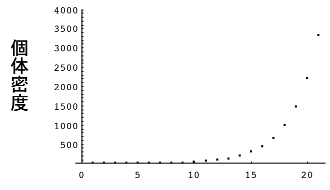
$N_t = N_0 r^t$　　$r = b + s$　　r : マルサス係数

$r > 1$ の時、集団サイズは時間とともに増加（指数増加）
$0 < r < 1$ の時、指数減少

指数モデルの例

$r = 1.5, N_0 = 1$ の場合　　$N_t = N_0\, r^t$　　$N_t = 1.5^t$

{1, 1.5, 2.25, 3.375, 5.0625, 7.59375, 11.3906, 17.0859, 25.6289, 38.4434, 57.665, 86.4976, 129.746, 194.62, 291.929, 437.894, 656.841, 985.261, 1477.89, 2216.84, 3325.26}

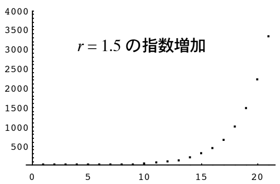


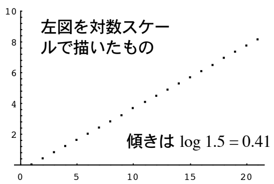
対数スケール

両辺の対数をとって　　$N_t = N_0\, r^t$　　$\log N_t = \log N_0 + t \log r$

指数増加の場合、個体密度の対数は時間 t に比例して増加

対数スケールのグラフは直線となり、傾きは $\log r$





大腸菌の増殖例

個体密度が指数的に変化しているかどうかを見るには、対数スケールに注目する。指数的に変化するなら直線になるはず。

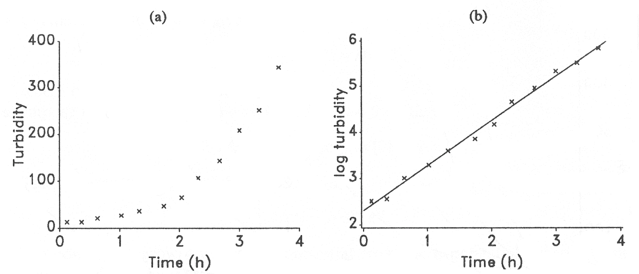
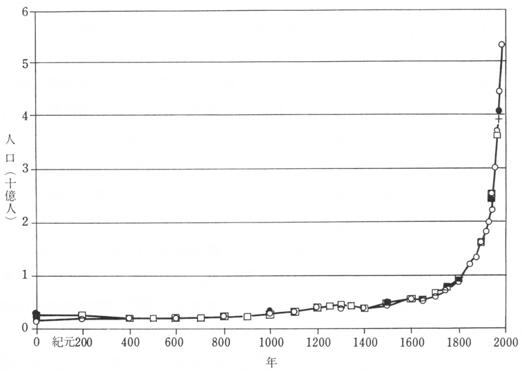


Figure 1.3 Exponential growth in the bacterium *E. coli*. (a) Increase in turbidity; (b) increase in log turbidity showing fitted straight line of exponential growth with rate constant $r = 0.84\ \mathrm{h}^{-1}$ A turbidity of 100 units corresponds to approximately 10^8 cells/ml.

Brown and Rothery 1993

地球全体の人口増加



では、どのように人口は増加してきたのか？

地球人口は指数モデルに従うか

2000 年前の推定人口は 2.5 億。
現在 (2000 年時) の人口が 60 億となる増加率 r は？

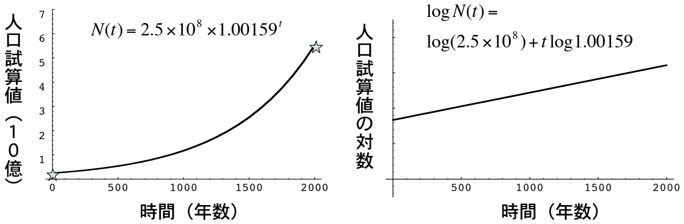
毎年 r 倍に指数増加するモデル解　$N(t) = N(0)r^t$

$$N(2000) = 2.5r^{2000} = 60$$

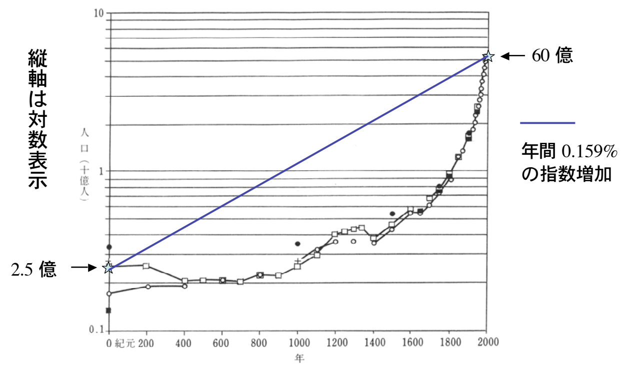
$$r = (60/2.5)^{1/2000} = 1.00159$$

年間 0.159% の増加を 2000年間継続すれば 60億に達する

2000 年前に 2.5 億人、現在 60 億人に当てはめた指数モデル



過去 2000 年間の人口推移（半対数表示）



過去200年間人口は指数増加よりも急速に増加している！

倍加時間 Doubling Time

指数増加モデルで、個体密度が 2 倍に増加するのに要する時間を
倍加時間 (Doubling Time) と呼ぶ。

倍加時間を T_d とすると定義から　　$N_{t+Td} = 2\,N_t$

$N_t = N_0\,r^t$　を代入して、　$N_0\,r^{t+Td} = 2\,N_0\,r^t$

結局、　$r^{Td} = 2$　となり、　$\boxed{T_d = \log 2 / \log r}$

$r = 1.05$ / year の場合、$T_d = \log 2 / \log 1.05 = 14.2$ years

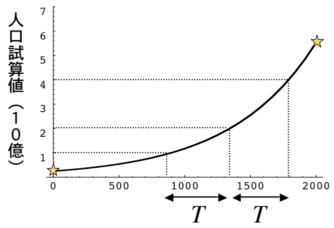
$r = 1.005$ / year の場合、$T_d = \log 2 / \log 1.005 = 139.0$ years

人類が指数増加した時の倍加時間

指数増加　$N(t) = N(0)r^t$　の倍加時間 T は

$\boxed{T = \log 2 / \log r = 0.693 / \log r}$

r が 1 に近い値の時 ($r > 1$)、$\log r \sim r - 1$ と近似可能



$r = 1.00159$（年 0.159% の増加）

$T \sim 0.693 / 0.00159 = 436$ 年

人口が過去 2000 年間指数的に増加
してきたとすると、436 年毎に倍増。

ロジスティックモデル

マルサス係数 r が一定であれば指数増加 ($r > 1$)

$$N_{t+1} = rN_t$$

マルサス係数 r が個体密度 N_t に比例して減少する場合
（食料不足・環境悪化等が原因）

$$N_{t+1} = r(1 - aN_t)N_t$$

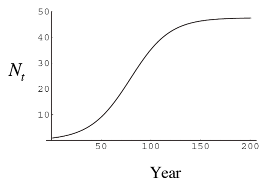
この時、個体密度はロジスティック成長 logistic growth を示す

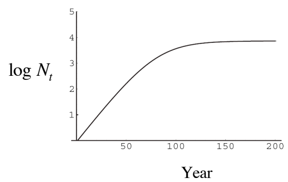
ロジスティック成長

$N_{t+1} = r(1 - aN_t)N_t$　　$r = 1.05,\ a = 0.001$

$N_0 = 1.0$

{1, 1.04895, 1.10024, 1.15398, 1.21028, 1.26926, 1.33103, 1.39572, 1.46346, 1.53439, 1.60864, 1.68635, 1.76768, 1.85278, 1.94182, 2.03495, 2.13235, 2.23419, 2.34066, 2.45194, 2.56823, 2.68971, 2.8166, 2.9491, 3.08743, 3.23179, ... , 47.619}





ロジスティック成長の上限

$N_{t+1} = r(1 - aN_t)N_t$ に従う数列の極限

$N_{t+1} = N_t = N^*$ 　　　$N^* = r(1 - aN^*)N^*$

$$N^* = \frac{r-1}{ra} = K$$ 環境収容量

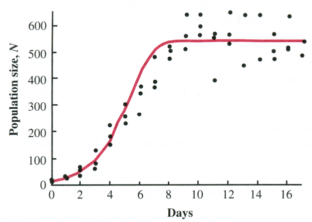
$$N_{t+1} = r\left(1 - \frac{r-1}{rK}N_t\right)N_t$$

$$= N_t + \underline{(r-1)\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)N_t}$$

年間変化　$N_t = K$ の時ゼロ

ロジスティック成長の実例

Paramecium aurelia



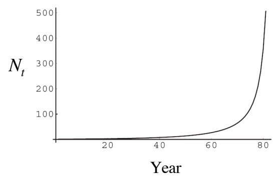
Case 2000 より

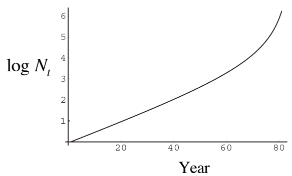
最後の審判日モデル

マルサス係数 r が個体密度 N_t に比例して増加する場合

$N_{t+1} = \underline{r(1 + aN_t)}N_t$ 　　$r = 1.05, a = 0.001$ 　$N_0 = 1.0$

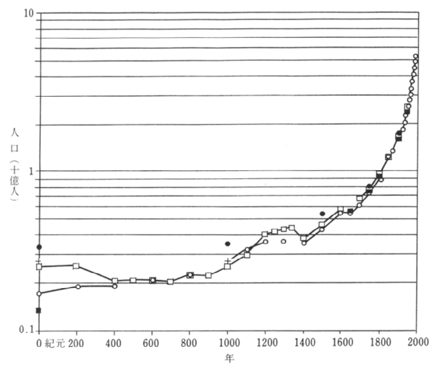
{1, 1.05105, 1.10476, 1.16128, 1.22076, 1.28337, 1.34926, 1.41864, 1.49168, 1.5686, 1.64962, 1.73495, 1.82486, 1.9196, 2.01945, 2.12471, 2.23568, 2.35271, 2.47616, 2.60641, 2.74386, 2.88896, 3.04217, ... }





有限時間で個体密度は発散

人間の数の増加



「新人口論－生態学的アプローチ」
農山漁村文化協会 1998
Joel E. Cohen著　重定・瀬野・高須共訳

地球人口は指数増加よりも急激に増加している！

モデルの検討

指数増加モデル　$N_{t+1} = N_t + (r-1)N_t$

マルサス係数 r は定数ではなく、時代もしくは社会情勢に左右される。

ロジスティックモデル　$N_{t+1} = N_t + (r-1)\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)N_t$

成長の限界である環境収容量はどれだけか不明

最後の審判日モデル　$N_{t+1} = N_t + (r-1)N_t + raN_t^2$

有限時間で人口は発散

人間集団には様々な齢の個体が存在。若齢者が多い集団とそうでない集団では当然、個体数（人口）の変化も異なるはず。上記モデルは齢構造を無視

問題

指数増加モデル、ロジスティックモデル、最後の審判モデル、のそれぞれについて、適当なパラメータ、初期値を用いて数値計算を行い、グラフで視覚化してみよ。