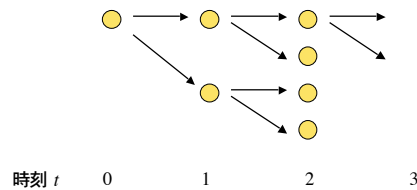


## 人口動態のモデル

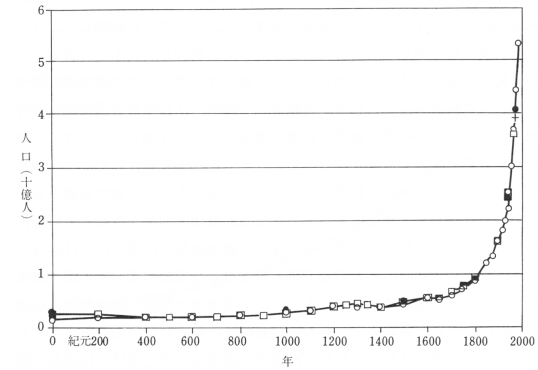
モデル：複雑な現象をより良く理解するための理想状況

数理モデル：理想化された状況を数式で記述したもの

各個体が一定の時間間隔毎に同期して分裂して2個体になる過程を繰り返す仮想的な生物集団



地球全体の人口はほぼ一貫して増加し続けている



では、どのように人口は増加してきたのか？

## 個体数の時間変化

時刻  $t$  での個体数を  $N_t$  と書くと、単位時間に1個体は2個体に分裂

$$N_{t+1} = 2N_t$$

単位時間内に同期して2個体に分裂するという仮定に基づくモデル

初期個体数が  $N_0$  のとき、  $N_t = N_0 2^t$

より一般的に、1個体が単位時間に  $r$  倍に増殖すると仮定すれば、

$$N_{t+1} = rN_t \quad N_t = N_0 r^t$$

## 個体数～個体密度

厳密には生物の個体数は非負の整数値。

単位面積あたりの個体密度を考えればゼロもしくは正の実数。

個体密度に注目したダイナミクスを考える。

単位時間後の個体密度  $N_{t+1}$  が前年の密度  $N_t$  の関数で決まる場合

$$N_{t+1} = f(N_t)$$

生き物の増え方に依存して関数  $f$  の概型は異なる

## 指数モデル

単位時間内に各個体が  $b$  個体の子供を生み、生存確率  $s$  で生き延びる仮想的な生物集団

$$N_{t+1} = bN_t + sN_t = (b+s)N_t$$

$\uparrow$        $\uparrow$        $\uparrow$   
 集団に新たに    生き残る    正味の増加率  
 加わる個体数    個体数

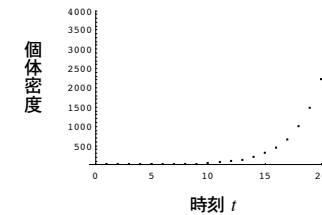
$$N_t = N_0 r^t \quad r = b + s \quad r: \text{マルサス係数}$$

$r > 1$  の時、集団サイズは時間とともに増加（指数増加）  
 $0 < r < 1$  の時、指数減少

## 指数モデルの例

$$r = 1.5, N_0 = 1 \text{ の場合} \quad N_t = N_0 r^t \quad N_t = 1.5^t$$

{1, 1.5, 2.25, 3.375, 5.0625, 7.59375, 11.3906, 17.0859, 25.6289, 38.4434, 57.665, 86.4976, 129.746, 194.62, 291.929, 437.894, 656.841, 985.261, 1477.89, 2216.84, 3325.26}

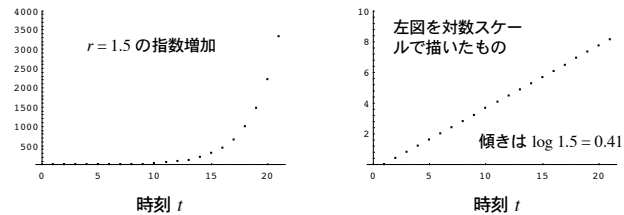


## 対数スケール

両辺の対数をとって  $N_t = N_0 r^t \quad \log N_t = \log N_0 + t \log r$

指数増加の場合、個体密度の対数は時間  $t$  に比例して増加

対数スケールのグラフは直線となり、傾きは  $\log r$



## 大腸菌の増殖例

個体密度が指数的に変化しているかどうかを見るには、対数スケールに注目する。指数的に変化するなら直線になるはず。

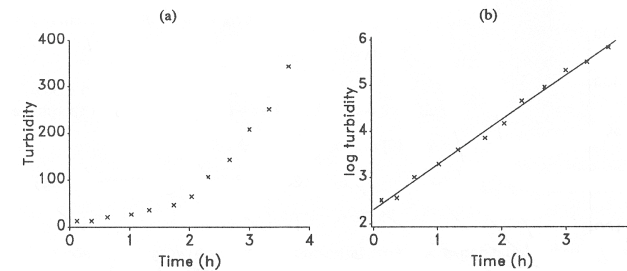
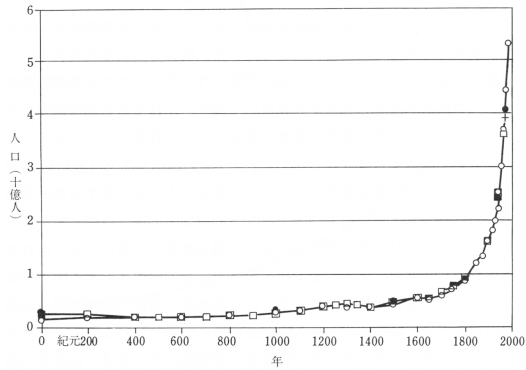


Figure 1.3 Exponential growth in the bacterium *E. coli*. (a) Increase in turbidity; (b) increase in log turbidity showing fitted straight line of exponential growth with rate constant  $r = 0.84 \text{ h}^{-1}$ . A turbidity of 100 units corresponds to approximately  $10^8$  cells/ml.

Brown and Rothery 1993

## 地球全体の人口増加



では、どのように人口は増加してきたのか？

## 地球人口は指数モデルに従うか

2000 年前の推定人口は 2.5 億。  
現在 (2000 年時) の人口が 60 億となる増加率  $r$  は？

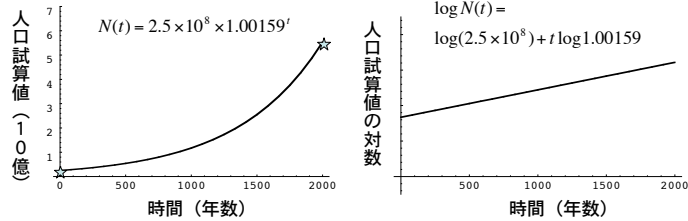
毎年  $r$  倍に指数増加するモデル解  $N(t) = N(0)r^t$

$$N(2000) = 2.5r^{2000} = 60$$

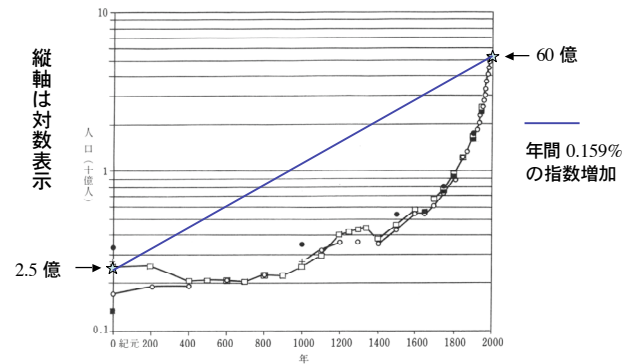
$$r = (60/2.5)^{1/2000} = 1.00159$$

年間 0.159% の増加を 2000年間継続すれば 60億に達する

## 2000 年前に 2.5 億人、現在 60 億人に当てはめた指数モデル



## 過去 2000 年間の人口推移 (半対数表示)



過去2000年間人口は指数増加よりも急速に増加している！

## 倍加時間 Doubling Time

指数増加モデルで、個体密度が2倍に増加するのに要する時間を倍加時間 (Doubling Time) と呼ぶ。

倍加時間を  $T_d$  とすると定義から  $N_{t+T_d} = 2 N_t$

$N_t = N_0 r^t$  を代入して、  $N_0 r^{t+T_d} = 2 N_0 r^t$

結局、  $r^{T_d} = 2$  となり、  $T_d = \log 2 / \log r$

$r = 1.05 / \text{year}$  の場合、  $T_d = \log 2 / \log 1.05 = 14.2 \text{ years}$

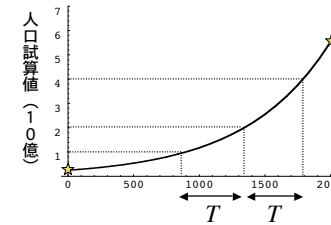
$r = 1.005 / \text{year}$  の場合、  $T_d = \log 2 / \log 1.005 = 139.0 \text{ years}$

## 人類が指数増加した時の倍加時間

指数増加  $N(t) = N(0)r^t$  の倍加時間  $T$  は

$$T = \log 2 / \log r = 0.693 / \log r$$

$r$  が 1 に近い値の時 ( $r > 1$ )、 $\log r \sim r - 1$  と近似可能



$r = 1.00159$  (年 0.159% の増加)

$T \sim 0.693 / 0.00159 = 436 \text{ 年}$

人口が過去 2000 年間指数的に増加してきたとすると、436 年毎に倍増。

## ロジスティックモデル

マルサス係数  $r$  が一定であれば指数増加 ( $r > 1$ )

$$N_{t+1} = r N_t$$

マルサス係数  $r$  が個体密度  $N_t$  に比例して減少する場合 (食料不足・環境悪化等が原因)

$$N_{t+1} = r(1 - a N_t) N_t$$

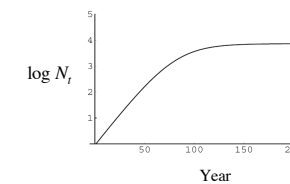
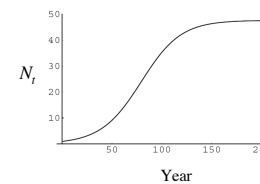
この時、個体密度はロジスティック成長 logistic growth を示す

## ロジスティック成長

$$N_{t+1} = r(1 - a N_t) N_t \quad r = 1.05, a = 0.001$$

$$N_0 = 1.0$$

{1, 1.04895, 1.10024, 1.15398, 1.21028, 1.26926, 1.33103, 1.39572, 1.46346, 1.53439, 1.60864, 1.68635, 1.76768, 1.85278, 1.94182, 2.03495, 2.13235, 2.23419, 2.34066, 2.45194, 2.56823, 2.68971, 2.8166, 2.9491, 3.08743, 3.23179, ..., 47.619}



## ロジスティック成長の上限

$N_{t+1} = r(1 - aN_t)N_t$  に従う数列の極限

$$N_{t+1} = N_t = N^* \quad N^* = r(1 - aN^*)N^*$$

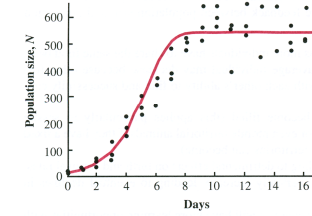
$$N^* = \frac{r-1}{ra} = K \quad \text{環境収容量}$$

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= r \left( 1 - \frac{r-1}{rK} N_t \right) N_t \\ &= N_t + (r-1) \left( 1 - \frac{N_t}{K} \right) N_t \end{aligned}$$

年間変化  $N_t = K$  の時ゼロ

## ロジスティック成長の実例

*Paramecium aurelia*



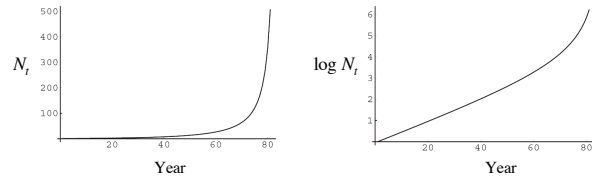
Case 2000 より

## 最後の審判日モデル

マルサス係数  $r$  が個体密度  $N_t$  に比例して増加する場合

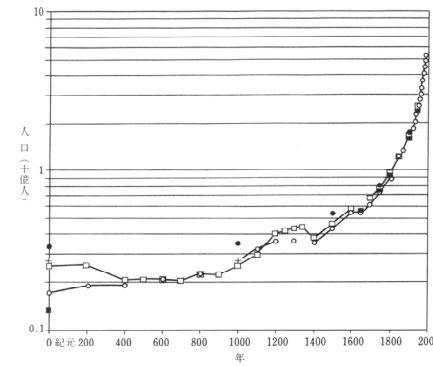
$$N_{t+1} = r(1 + aN_t)N_t \quad r = 1.05, a = 0.001 \quad N_0 = 1.0$$

{1, 1.05105, 1.10476, 1.16128, 1.22076, 1.28337, 1.34926, 1.41864, 1.49168, 1.5686, 1.64962, 1.73495, 1.82486, 1.9196, 2.01945, 2.12471, 2.23568, 2.35271, 2.47616, 2.60641, 2.74386, 2.88896, 3.04217, ... }



有限時間で個体密度は発散

## 人間の数の増加



「新人口論－生態学的アプローチ」  
 嵐山漁村文化協会 1998  
 Joel E. Cohen 著 重定・瀬野・高須共訳

地球人口は指数増加よりも急激に増加している！

## モデルの検討

指数増加モデル  $N_{t+1} = N_t + (r - 1)N_t$

マルサス係数  $r$  は定数ではなく、時代もしくは社会情勢に左右される。

ロジスティックモデル  $N_{t+1} = N_t + (r - 1) \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) N_t$

成長の限界である環境収容量はどれだけか不明

最後の審判日モデル  $N_{t+1} = N_t + (r - 1)N_t + raN_t^2$

有限時間で人口は発散

人間集団には様々な年齢の個体が存在。若齢者が多い集団とそうでない集団では当然、個体数（人口）の変化も異なるはず。上記モデルは年齢構造を無視

## 問題

指数増加モデル、ロジスティックモデル、最後の審判モデル、のそれぞれについて、適当なパラメータ、初期値を用いて数値計算を行い、グラフで視覚化してみよ。

