

Lotka Volterra の捕食モデルの振動解

このモデルの解は必ず周期解になることが証明できる。

元の式を変形して $\frac{1}{H} \frac{dH}{dt} = r_H - aP, \quad \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = -r_P + bH$

この2つの式より $(-r_P + bH) \frac{1}{H} \frac{dH}{dt} - (r_H - aP) \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = 0$

$$\left(-\frac{r_P}{H} + b\right) \frac{dH}{dt} + \left(-\frac{r_H}{P} + a\right) \frac{dP}{dt} = 0$$

両辺を積分すると $\int \left(-\frac{r_P}{H} + b\right) dH + \int \left(-\frac{r_H}{P} + a\right) dP = C$

$$bH - r_P \log H + aP - r_H \log P = C$$

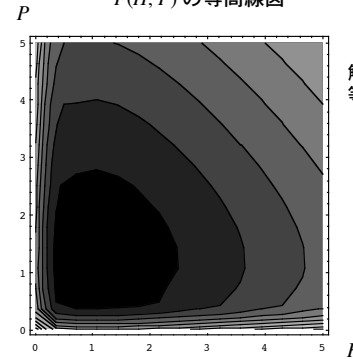
左辺の関数を $F(H, P) = bH - r_P \log H + aP - r_H \log P$ とする

関数 $F(H, P)$ は、くぼんだお椀の形をしている。

13

解の軌道と保存量

$F(H, P)$ の等高線図



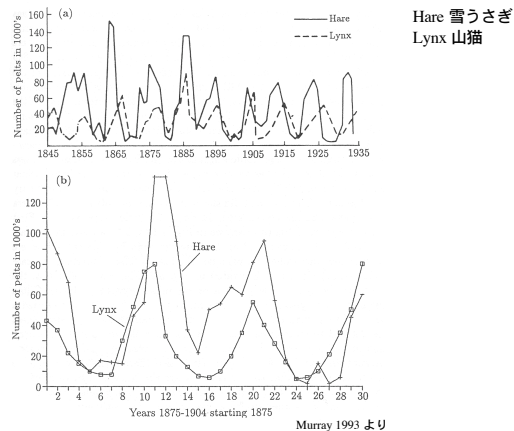
解の軌道は初期値 (H_0, P_0) で決まる等高線上にある (必ず閉軌道になる)

$$F(H, P) = F(H_0, P_0)$$

途中で軌道をずらすと、元の軌道にはもどらない。軌道は中立安定

14

実例

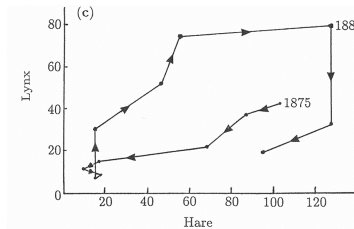


15

実例続き

ウサギが山猫を食べる??

相平面上にプロットしたデータは、ウサギが捕食者、山猫が被食者であることを示している。



ウサギが山猫に伝染病を媒介する可能性?

実際のところ、山猫は雪ウサギの死亡の主因ではない。

ウサギと山猫の振動は捕食関係が原因ではない可能性がある。

Fig. 3.3a-c. (a) Fluctuations in the number of pelts sold by the Hudson Bay Company (Redrawn from Odum 1953). (b) Detail of the 30 year period starting in 1875 based on the data from Elton and Nicholson (1942). (c) Phase plane plot of the data represented in (b) (after Gilpin 1973).

捕食者と被食者密度がきれいに振動する実例は多くはない。

しかし、モデル解析は、捕食者系で振動が起こりうることを示している。

16

より現実的な捕食モデル

捕食がないとき、被食者はロジスティック増殖をする場合のモデル

$$\frac{dH}{dt} = r_H \left(1 - \frac{H}{K}\right) H - aHP$$

捕食は捕食者と被食者密度の積に比例して起こると考える

$$\frac{dP}{dt} = -r_p P + bHP$$

アイソクライン法で解の振る舞いを調べる

$$\frac{dH}{dt} = \left\{ r_H \left(1 - \frac{H}{K}\right) - aP \right\} H = 0$$

$$H = 0, P = \frac{r_H}{a} \left(1 - \frac{H}{K}\right)$$

ヌルクラインは

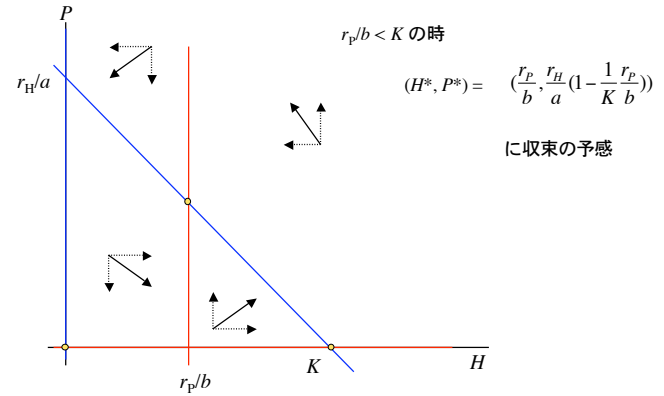
$$\frac{dP}{dt} = \{-r_p + bH\} P = 0$$

$$P = 0, H = \frac{r_p}{b}$$

17

アイソクライン

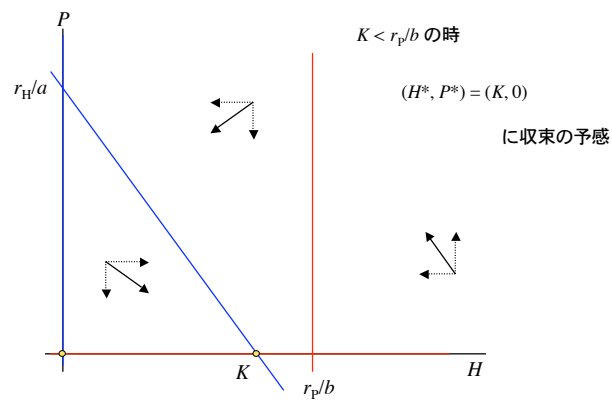
Hのヌルクライン $H = 0, P = \frac{r_H}{a} \left(1 - \frac{H}{K}\right)$ Pのヌルクライン $P = 0, H = \frac{r_p}{b}$



18

アイソクライン 2

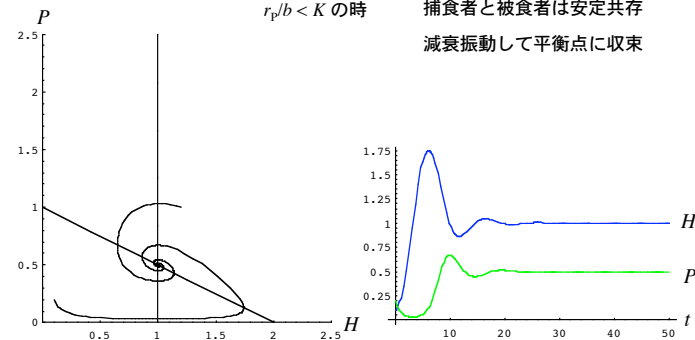
Hのヌルクライン $H = 0, P = \frac{r_H}{a} \left(1 - \frac{H}{K}\right)$ Pのヌルクライン $P = 0, H = \frac{r_p}{b}$



19

数値計算例

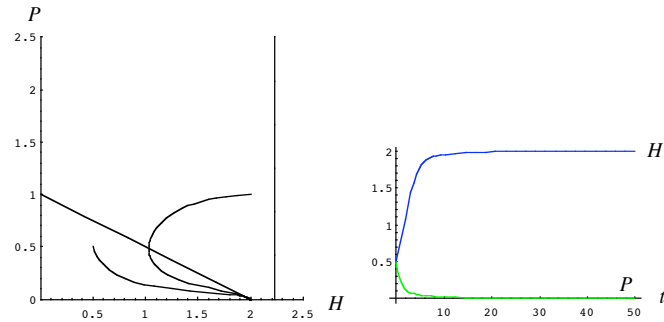
$r_p/b < K$ の時 捕食者と被食者は安定共存
減衰振動して平衡点に収束



20

数値計算例 2

$K < r_p/b$ の時 初期状態に関わらず、捕食者は絶滅。被食者のみが生存。



21

捕食の飽和効果

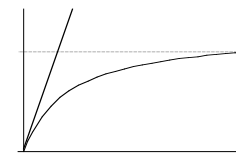
捕食者が一度に捕食できる量には上限がある。被食者密度 H が高くなっても、捕食者 1 個体が消費する被食者量には限界がある (飽和効果)。

捕食者 1 個体あたりの捕食回数が、被食者密度 H の飽和関数で与えられる場合。

$$\frac{dH}{dt} = r_H \left(1 - \frac{H}{K}\right) H - a \frac{HP}{1+cH}$$

$$\frac{dP}{dt} = -r_p P + b \frac{HP}{1+cH}$$

捕食者 1 個体あたり捕食回数



被食者密度 H

22

ヌルクライン

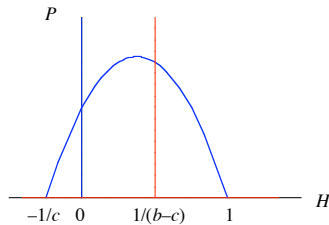
スケール変換により次式に帰着できる。

$$\frac{dH}{dt} = \rho(1-H)H - a \frac{HP}{1+cH}$$

$$\frac{dP}{dt} = -P + b \frac{HP}{1+cH}$$

$$H = 0, P = \frac{\rho}{a}(1-H)(1+cH)$$

$$P = 0, H = \frac{1}{b-c}$$

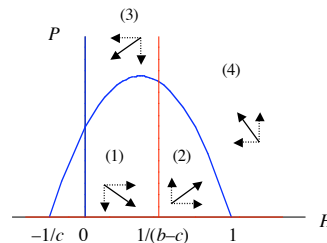


23

アイソクライン法

$$\frac{dH}{dt} = \rho(1-H)H - a \frac{HP}{1+cH}$$

$$\frac{dP}{dt} = -P + b \frac{HP}{1+cH}$$



$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad H = 0, P = \frac{\rho}{a}(1-H)(1+cH)$$

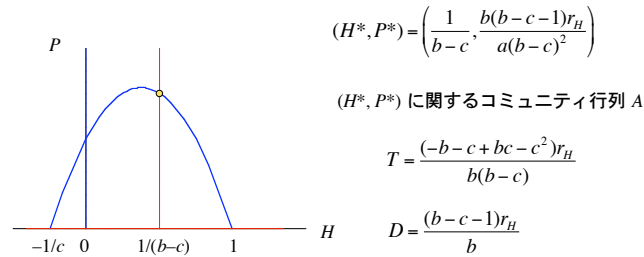
$$\frac{dP}{dt} = 0 \quad P = 0, H = \frac{1}{b-c}$$

24

平衡点

$$H = 0, P = \frac{\rho}{a}(1-H)(1+cH) \quad \text{かつ} \quad P = 0, H = \frac{1}{b-c}$$

両者が共存する平衡点は、 $0 < 1/(b-c) < 1$ の時に存在して



$$(H^*, P^*) = \left(\frac{1}{b-c}, \frac{b(b-c-1)r_H}{a(b-c)^2} \right)$$

(H^*, P^*) に関するコミュニティ行列 A

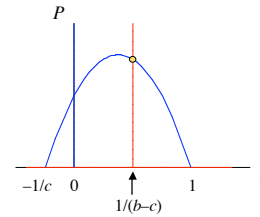
$$T = \frac{(-b-c+bc-c^2)r_H}{b(b-c)}$$

$$D = \frac{(b-c-1)r_H}{b}$$

固有値の実部が負である為の
必要十分条件は $T < 0, D > 0$

25

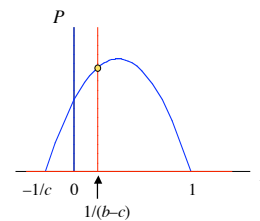
内部平衡点の安定性



P のヌルクラインが H のヌルクラインの頂の右側
にある場合 $(1-1/c)/2 < 1/(b-c) < 1$

$$T = \frac{(-b-c+bc-c^2)r_H}{b(b-c)} < 0 \quad D = \frac{(b-c-1)r_H}{b} > 0$$

(H^*, P^*) は局所的に安定



P のヌルクラインが H のヌルクラインの頂の左側
にある場合 $0 < 1/(b-c) < (1-1/c)/2$

$$T = \frac{(-b-c+bc-c^2)r_H}{b(b-c)} > 0 \quad D = \frac{(b-c-1)r_H}{b} > 0$$

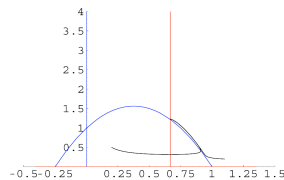
(H^*, P^*) は不安定

26

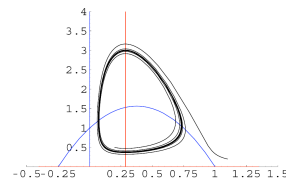
リミットサイクル

パラメータ b の値だけを変える。

内部平衡点が局所安定



内部平衡点が不安定



安定な周期解 Limit cycle が出現
初期値や外部からの攪乱に対して
安定な周期解。

27

問題 1

次のモデルについて問いに答えよ

$$\frac{dH}{dt} = r_H \left(1 - \frac{H}{K}\right) H - aHP$$

$$\frac{dP}{dt} = -r_p P + bHP$$

- 1) 平衡点をすべて求めよ
- 2) それぞれの平衡点に関して局所安定性解析を行い、安定性のパラメータ依存性を調べよ。

28

問題 2

次のモデルは、捕食が捕食者と被食者密度の積に比例して起こる場合を想定している。

$$\frac{dH}{dt} = r_H \left(1 - \frac{H}{K}\right) H - aHP$$

しかし実際問題、捕食が捕食者と被食者密度の積に比例するという仮定は、次の理由から現実的ではない。

$$\frac{dP}{dt} = -r_P P + bHP$$

捕食者が一度に捕食できる量に限りがあるため、 H が高くなっても、捕食者1個体が消費する被食者量には限界がある（飽和効果）。

そこで次のモデルを考えた。

$$\frac{dH}{dt} = r_H \left(1 - \frac{H}{K}\right) H - a \frac{HP}{1 + cH}$$

1) アイソクライン法で解の振る舞いを調べよ。

2) 数値計算を行え。

$r_H = r_P = 1$, $a = b = 0.01$, $c = 0.005$,
 $K = 500, 625$ の二通りで計算せよ。

$$\frac{dP}{dt} = -r_P P + b \frac{HP}{1 + cH}$$