

1999年7月9日配布

このレポートは必須ではないが、学期末試験で成績を判定する際の参考資料とするため、提出することが望ましい。提出先はG311、提出期限は9月17日(金)。なお、期限を過ぎたレポートは受け取らない。

## 1

連続時間モデルで時刻  $t$  の集団サイズを  $N(t)$  で表すことにする。1 個体当たりの増加率が一定値  $r$  であると仮定すると、 $N(t)$  の時間変化は下式で表すことができる。

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r$$

ここで、 $r$  は内的増加率であり、 $r > 0$  であるとする。

1. 時刻  $t = 0$  で  $N(0) = N_0$  としたとき、上式を解け。
2. 集団サイズが5倍に増加するのに要する時間を次の3つの場合について求めよ。時間の単位に注意すること。 $r = 1$  per hour,  $r = 0.5$  per day,  $r = 0.2$  per week。

## 2

連続時間モデルで、ロジスティック増殖をする集団の大きさ  $N(t)$  は次式に従う。

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N$$

ここで、 $r$  は内的自然増加率、 $K$  は環境収容量である。

1. 初期条件  $N(0) = N_0$  の下で、上式を変数分離法を用いて解け。
2. この集団から外部へ個体の移出がある状況を考える。移出個体数が集団の大きさ  $N$  に比例すると考え、比例係数を  $c$  とすると、この時の集団の時間変化を記述する微分方程式はどのようなものになるか？
3. 集団サイズに比例する移出があるとき、移出係数  $c$  と平衡状態の集団サイズとの間にはどのような関係があるか述べよ。

## 3

アメリカ合衆国の人口の変遷(1790年 - 1940年)に関するデータがある。人口増加が、i) 指数的増加か、ii) 人口の増大につれて成長が鈍るか、のどちらであるかを定量的に(具体的な数値をもって)議論せよ。目で見ただけで判断したというのは不可。

Year	人口(百万人)	Year	人口(百万人)
1790	3.929	1870	38.558
1800	5.308	1880	50.156
1810	7.240	1890	62.948
1820	9.638	1900	75.995
1830	12.866	1910	91.972
1840	17.069	1920	105.711
1850	23.192	1930	122.775
1860	31.443	1940	131.410

## 4

Lotka-Volterra の2種系競争モデルについて答えよ。

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} &= e_1 \left(1 - \frac{n_1 + a_{12}n_2}{K_1}\right) n_1 \\ \frac{dn_2}{dt} &= e_2 \left(1 - \frac{a_{21}n_1 + n_2}{K_2}\right) n_2 \end{aligned}$$

ここで、 $n_1, n_2$  は、それぞれ種1、種2の集団密度、 $e_1, e_2$  は内的自然増加率、 $K_1, K_2$  は環境収容量(種内競争)、 $a_{ij}$  は種  $i$  が種  $j$  から受ける種間競争の強さを表す。

1. 相平面を用いたアイソクライン法で、2つの集団が共存する場合のアイソクラインの図を描き、両者が共存するためのパラメータの条件を導け。
2. このとき、種1と種2が共存する平衡点は局所的に安定であることを示せ。簡単のため、 $K_1 = K_2 = 1$  の場合を考えよ。

## 5

捕食者  $P$  と非捕食者  $H$  の集団密度の時間変化が次式の Lotka-Volterra の捕食のモデルで記述されるとする。

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= r_H H - aHP \\ \frac{dP}{dt} &= -r_P P + bHP\end{aligned}$$

1. 上式の平衡点を求め (2つある)、それぞれの局所安定性を調べよ。
2. 非自明な平衡点 (原点でない方の平衡点) の近傍では、捕食者と非捕食者の集団サイズは周期  $2\pi/\sqrt{r_H r_P}$  の周期変動をすることを示せ。
3. 上の問いの答えをアイソクラインを描いた相平面上で説明せよ。
4. 関数  $G(P, H) = bH - r_P \log H + aP - r_H \log P$  を考える。 $G(P, H)$  は  $(P, H)$  平面上に浮いた曲面を表すが、非自明な平衡点の時に最小値をとる、お椀のような関数であることを示せ。
5. 関数  $G(P, H)$  を、このモデルの軌道に沿って時間微分するとゼロになることを示せ。このとき、合成関数の微分に関して、次の規則が成り立つことを参考にせよ。また、軌道に沿って微分するとは、 $P$  と  $H$  が常に上の微分方程式を満たしていることを意味する。

$$\frac{dG(P, H)}{dt} = \frac{\partial G(P, H)}{\partial P} \frac{dP}{dt} + \frac{\partial G(P, H)}{\partial H} \frac{dH}{dt}$$

関数  $G$  を軌道に沿って微分するとゼロになることから、 $G$  の値は初期値  $(P(0), H(0))$  によって決まり、時間的に変化しない定数であることがわかる。これを保存量という。関数  $G$  はお椀型の形をしていることから、これはモデルの軌道  $(P(t), H(t))$  が必ず閉じることを意味している。ここでは近似は一才行っていないことから、どのような初期値に対しても、Lotka Volterra の捕食のモデルの解は必ず周期的に変動することの証明になっている。

## 6

上の Lotka Volterra の捕食のモデルは次の2点に関して現実的ではない。1) 捕食者が存在しないとき ( $P = 0$ ) 被捕食者は指数的に増加すること。2) 捕食は両者の密度の積 ( $PH$ ) に比例するため、被捕食者密度が100倍になれば、捕食回数も100倍になるが、現実には、餌がありすぎても捕食者が捕食できる量には限度があること。そこで、この点を補うために、モデルを次のように改良した。

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= r_H \left(1 - \frac{H}{K}\right) H - a \frac{H}{1 + cH} P \\ \frac{dP}{dt} &= -r_P P + b \frac{H}{1 + cH} P\end{aligned}$$

1. 上記の式の右辺各項について、生物学的な意味付けを行え。
2. 上式の振る舞いを、相平面 (横軸が  $H$ 、縦軸が  $P$ ) を用いたアイソクライン法で解析せよ。
3. パラメータ値を、 $r_H = r_P = 1, a = b = 0.01, c = 0.005$  と決める。局所安定性解析を行い、 $K$  の値を変化させると、捕食者と被捕食者が共存する平衡点の安定性はどのように変化するかを調べよ。

## 7

A swimming pool is infested with algae whose population is  $N(t)$ . The owner attempts to control the infestation with an algicidal chemical, poured into the pool at a constant rate. In the absence of algae, the chemical decays naturally; when algae are present it is metabolised by them and kills them. The equations of the rates of change of  $N(t)$  and the concentration of the chemical in the pool,  $C(t)$ , are

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= aN - bNC \\ \frac{dC}{dt} &= Q - \alpha C - \beta NC\end{aligned}$$

where  $a, b, Q, \alpha, \beta$  are positive constants.

1. Discuss the meaning of each term in these equations.
2. Draw null-clines in the phase plane diagram and show the direction of flow on it.
3. Show that this system has two positive equilibria if  $Q > \alpha a/b$ , and in this case one of the equilibria is stable.
4. What happens if  $Q < \alpha a/b$ ?
5. To keep the pool clean, what will you suggest to the owner?

Cambridge, NST, Part IA, Biological Mathematics, 1982 より抜粋改変