奈良女子大学　理学部　情報科学科

大域情報学　夏期レポート

１９９８年7月１７日配布

このレポートの提出は必須ではありませんが、提出すれば期末レポート成績の参考資料とします。提出先はＧ３１１、提出期限は９月１１日（金）とします。なお、期限を過ぎたレポートは受け取りません。

1

連続時間モデルで時刻 t の集団サイズを $N(t)$ で表すことにする。１個体当たりの増加率が一定値 r であると仮定すると、$N(t)$ の時間変化は下式で表すことができる。

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r$$

ここで、rは内的増加率であり、$r > 0$ であるとする。

1. 時刻 $t = 0$ で $N(0) = N_0$としたとき、上式を解け。
2. 集団サイズが５倍に増加するのに要する時間を次の３つの場合について求めよ。$r = 1$ per hour, $r = 0.5$ per day, $r = 0.2$ per week。

2

連続時間モデルで、ロジスティック増殖をする集団の大きさ $N(t)$ は次式に従う。

$$\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{K})N$$

ここで、rは内的増加率、K は環境収容量である。

1. 初期条件 $N(0) = N_0$の下で、上式を解け。
2. この集団から外部へ個体の移出がある状況を考える。移出個体数が集団の大きさ Nに比例すると考え、比例係数を c とすると、この時の集団の時間変化を記述する微分方程式はどのようなものになるか？
3. 集団サイズに比例する移出があるとき、移出係数 c と平衡状態の集団サイズとの間にはどのような関係があるか述べよ。

3

アメリカ合衆国の人口の変遷（１７９０年－１９４０年）に関するデータがある。人口増加が、i) 指数的増加か、ii) 人口の増大につれて成長が鈍るか、のどちらであるかを定量的に（具体的な数値でもって）議論せよ。目で見て判断したというのは不可。

Year	人口（百万人）	Year	人口（百万人）
1790	3.929	*1870*	38.558
1800	5.308	*1880*	50.156
1810	7.240	*1890*	62.948
1820	9.638	*1900*	75.995
1830	12.866	*1910*	91.972
1840	17.069	*1920*	105.711
1850	23.192	*1930*	122.775
1860	31.443	*1940*	131.410

4

１種系離散時間モデルで、時刻 t の個体数 N_tが、以下の式に従って変化している状況を考える。

$$N_{t+1} = R(1 - N_t/K)N_t$$

1. このモデルが生物学的な意味（N_tがつねに非負）を持つためには、個体数 N_t は 0 以上 K 以下でなければならない。これを満たすための Rの上限値を求めよ。
2. 上式の平衡点は２つあるが、それぞれについて局所安定性解析を行い、十分時間がたった後の個体数について述べよ。
3. 上式では個体数の範囲に制限があったが、これを正すため下記のモデルを考えた。先ほどのモデルとの違いについて述べよ。下記のモデルについて、平衡点の局所安定性を調べよ。

$$N_{t+1} = N_t e^{r(1-N_t/K)}$$

5

捕食者 P と非捕食者 H の時間変化が次式の Lotka-Volterra モデルで記述されるとする。

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= r_H H - aHP \\ \frac{dP}{dt} &= -r_P P + bHP\end{aligned}$$

1. 上式の平衡点を求め、それぞれについて局所安定性を調べよ。
2. 非自明な平衡点（原点でない方の平衡点）の近傍では、捕食者と非捕食者の集団サイズは周期 $2\pi/\sqrt{r_H r_P}$ の周期変動をすることを示せ。
3. 上の問いの答えをアイソクラインを描いた相平面上で説明せよ。

6

前問の Lotka-Volterra モデルは、１）捕食者が存在しない時、非捕食者は指数的に増加して集団サイズが発散する、２）捕食者１個体が消費する非捕食者には上限がない、という点で現実的ではない。そこで、次のモデルを考えた。

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= r_H(1-\frac{H}{K}) - a\frac{H}{c+H}P \\ \frac{dP}{dt} &= -r_P P + b\frac{H}{c+H}P\end{aligned}$$

1. 上式の右辺の各項について生物学的な意味づけを行え。
2. 相平面上でアイソクライン法を用いて、解の定性的な振る舞いを調べよ。パラメータ K, c などの値に依存して解の振る舞いはどのように変わるか？

7

Nicholson-Bailey の寄生のモデルについて下記の問に答えよ。

$$\begin{aligned}H_{t+1} &= Re^{-aP_t}H_t \\ P_{t+1} &= c(1-e^{-aP_t})H_t\end{aligned}$$

ここで、P_t、H_tはそれぞれ時刻 t における寄生者と宿主の密度とする。

1. この離散式の平衡点を求めよ。
2. 平衡点は局所的に不安定であることを示せ。

8

A swimming pool is infested with algae whose population is $N(t)$. The owner attempts to control the infestation with an algicidal chemical, poured into the pool at a constant rate. In ths absence of algae, the chemical decays naturally; when algae are present it is metablised by them and kills them. The equations of the rates of change of $N(t)$ and the concentration of the chemical in the pool, $C(t)$, are

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= aN - bNC \\ \frac{dC}{dt} &= Q - \alpha C - \beta NC\end{aligned}$$

where a, b, Q, α, β are positive constants.

1. Discuss the meaning of each term in these equations.
2. Draw null-clines in the phase plane diagram and show the direction of flow on it.
3. Show that this system has two positive equilibria if $Q > \alpha a/b$, and in this case one of the equilibria is stable.
4. What happens if $Q < \alpha a/b$?
5. To keep the pool clean, what will you suggest to the owner?

Cambridge, NST, Part IA, Biological Mathematics, 1982 より抜粋改変