確率変数の変換

- 一様乱数 X = U[0, 1) (0 ≤ X < 1) から、様々な確率分布に従う乱数を生成できる
- 指数分布に従う乱数、正規分布に従う乱数、などなど
- 具体例：一様乱数 X = U[0, 1) に対して、
    - Y = X + 1 は U[1, 2) に従う（自明）
    - Y = 2X は U[0, 2) に従う（自明）
    - Y = X^2 はどんな分布になるか？
    - 任意の変数変換Y = f(X) により、Y はどのような分布に従うのか？

確率変数の変換

- 一様乱数 X = U[0, 1) を変換Y = f(X) により変換する
- Y の分布はどのようなものになるか？（確率変数の変数変換）
- X の分布 p(x) とY の分布 q(y) の関係

$$\mathrm{Prob}[x < X < x + dx] = p(x)dx$$

$$\mathrm{Prob}[y < Y < y + dy] = q(y)dy$$

$$p(x)dx = q(y)dy$$

$$q(y) = p(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

問題 3

- 0 から 1 の一様乱数 X = U[0, 1) を下記の変数変換を施して得られる確率変数Y が満たす確率密度関数 q(y) を求めよ。疑似一様乱数を用いて、この結果を確かめよ
  - Y = – log X
  - Y = √ X
- 2つの一様乱数 X = U[0, 1), Y = U[0, 1) を用いて以下の変換で得られる確率変数 Z は、平均が0、分散が1の正規分布に従う（ボックス - ミュラー法）。Z を多数を生成し確率分布を描いて確認せよ

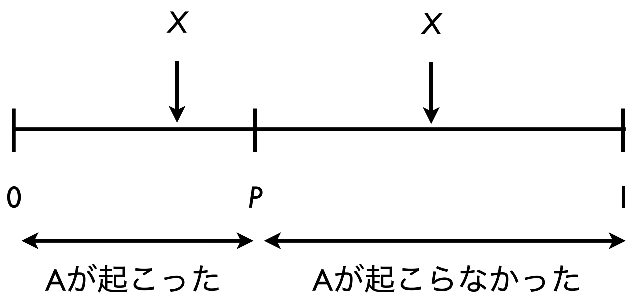
$$Z = \sqrt{-2 \log X} \cos 2\pi Y$$

モンテカルロ法

- 乱数を用いてシミュレーションや数値計算を行う手法の総称
- 物理学や生物学などのシミュレーションに良く用いられる
- 具体例：コイン投げ、ランダムウォーク（乱歩）、など、確率論的な事象の変化をアルゴリズムとして記述して実行する

確率的な事象のプログラム実装

- 確率 P で起こる事象 A をプログラムとして実装（$0 \leq P \leq 1$）
  - [0, 1) の疑似一様乱数 X を生成
  - $X < P$ なら、事象 A が起こったと見なす。そうでなければ起こらなかったと見なす（ベルヌイ試行）



X は区間 [0, 1) で一様

2018 (H30) 奈良女子大学理学部　環境科学コース　環境科学計算機実験

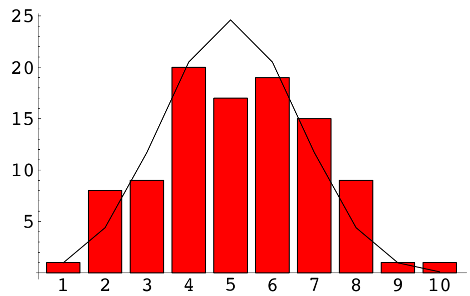
コイン投げ

- 正しく造られたコインは裏表がでる確率は $P = 1/2$ である。
- n 回コインを投げたとき、i 回表がでる確率（$i = 0, 1, 2, ..., n$）は、二項分布で与えられる（ベルヌイ試行の複数回繰り返し）

$$P_n(i) = \; {}_n\mathrm{C}_i \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

具体例：$P = 1/2, n = 10$ を 100 回繰り返したとき、表が出た回数

{7, 7, 9, 8, 4, 7, 8, 3, 7, 3, 1, 4, 2, 4, 5, 5,
6, 3, 8, 7, 5, 2, 6, 4, 4, 6, 3, 3, 5, 6, 2, 5, 8,
2, 6, 2, 6, 4, 6, 7, 10, 4, 5, 8, 5, 4, 4, 5, 4,
5, 3, 3, 8, 5, 5, 6, 5, 5, 4, 6, 6, 4, 2, 7, 2, 6,
6, 6, 4, 7, 5, 6, 3, 6, 7, 3, 6, 6, 8, 5, 6, 4, 7,
4, 2, 4, 5, 8, 7, 4, 4, 5, 7, 4, 4, 7, 7, 8, 6, 7}



問題 4

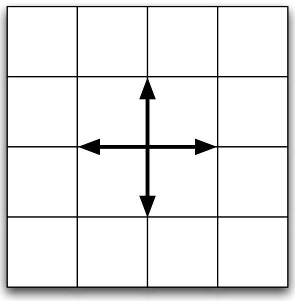
- コインを *n* 回投げる試行を *k* 回繰り返す。各試行で表が出た回数を *i* とする。*i* をファイルに書き出せ。
- 試行数 *k* を十分大きくとったとき、*i* の分布図を描け。また理論分布と比較せよ。*n* の値は適当でよい。

1回の試行で表が出た回数を戻り値として返す関数を定義

```
int binomial(int num, double prob)
{

  .....
  return count;
}
```


格子上のランダムウォーク

- 2 次元格子空間を考える。各個体は格子上に存在し、単位時間内に隣接する 4つの格子のいずれかへ等しい確率 1/4 で移動する。
- 初期分布として原点に *N* 個体存在する状態を考える。時刻 *t* での個体の空間分布はどのようなものか？
- また、時刻 *t* と原点から最も離れた個体の距離との関係は？



格子上のランダムウォーク

- N 個体の位置を 2次元配列で表現するランダムウォークに取り組む
- 初期状態として全ての個体は原点に位置するとする
- 以下を繰り返す（時刻のループ）
  - 次のアルゴリズムに従って、N 個体の座標を変化させる

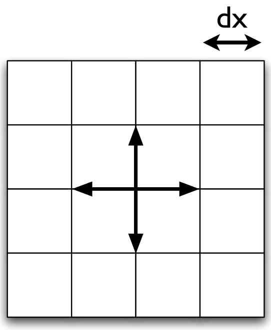
各個体の x, y 座標は

確率 1/4 で x += dx

確率 1/4 で x -= dx

確率 1/4 で y += dx

確率 1/4 で y -=dx

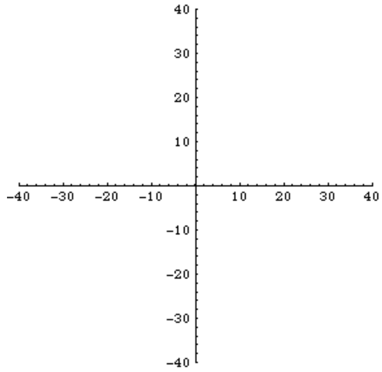


プログラム骨格

```
#define N 100

double x[N], y[N]  // 個体の座標


initialize();

for(step=0; step<STEP; step++){
    move_indivs(); // 個体を移動させる関数
    write_data(); // 個体の位置をファイルに書き出す
}

void move_indivs()
{
  ....
}
```

2次元格子上の乱歩

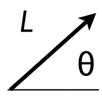
```
data = ReadList[ "data", Real, RecordLists -> True ];
data2 = Map[ Partition[#, 2] &, data];
Length[data2]
{ Max[data2], Min[data2] }

Do[
  ListPlot[ data2[[i]], PlotRange -> {{-40, 40}, {-40, 40}}, AspectRatio ->1 ]//Print, {i, 1,
Length[data2]}
]
```



2018 (H30) 奈良女子大学理学部　環境科学コース　環境科学計算機実験

問題 5

- 個体の位置は格子上ではなく、連続空間上にあるとする（x, y 座標が実数）
- 単位時間後の個体の移動に関して適当なルールを設定し、*N* 個体の移動分散の様子を調べよ。ルールとしては例えば下記が考えられる
  - ルール 1：一定の距離 *L* だけ移動するが、方角は任意の方向に等しい確率で移動
  - ルール 2：移動距離は一定 *L* だが、方向は *N* 個体の重心へ向かう、など



自分で設定したルールの下で、空間分布の時間変化および
時刻 *t* と原点から最も離れた個体の距離との関係を調べよ