

# 確率変数の変換

- 一様乱数  $X = U[0, 1)$  ( $0 \leq X < 1$ ) から、様々な確率分布に従う乱数を生成できる
- 指数分布に従う乱数、正規分布に従う乱数、などなど
- 具体例：一様乱数  $X = U[0, 1)$  に対して、
  - $Y = X + 1$  は  $U[1, 2)$  に従う (自明)
  - $Y = 2X$  は  $U[0, 2)$  に従う (自明)
  - $Y = X^2$  はどんな分布になるか？
  - 任意の変数変換  $Y = f(X)$  により、 $Y$  はどのような分布に従うのか？

# 確率変数の変換

- 一様乱数  $X = U[0, 1)$  を変換  $Y = f(X)$  により変換する
- $Y$  の分布はどのようなものになるか？ (確率変数の変数変換)
- $X$  の分布  $p(x)$  と  $Y$  の分布  $q(y)$  の関係

$$\text{Prob}[x < X < x + dx] = p(x)dx \quad p(x) = 1 \quad 0 \leq x < 1$$

$$\text{Prob}[y < Y < y + dy] = q(y)dy$$

$$p(x)dx = q(y)dy$$

$$q(y) = p(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

# 指数分布する乱数

- 一様乱数  $X = U[0, 1)$  を  $Y = -(\log X)/\gamma$  で変換して得られる乱数  $Y$  はパラメータ  $\gamma$  の指数分布に従う

$$Y = -\frac{\log U[0, 1)}{\gamma}$$

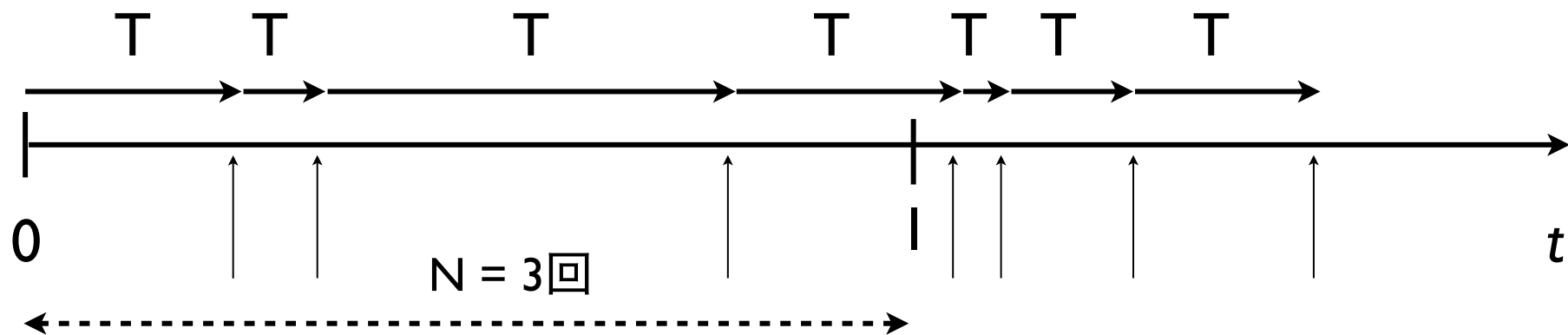
$$\text{Prob}[y < Y < y + dy] = q(y)dy$$

$$q(y) = \gamma e^{-\gamma y} \quad y \geq 0$$

$$E[Y] = \int_0^{\infty} yq(y)dy = \frac{1}{\gamma}$$

# 指数分布する乱数

- 発生率（単位時間の発生回数）が  $\gamma$  である出来事が起こるまでの待ち時間  $T$  はパラメータ  $\gamma$  の指数分布に従う（Poisson過程）



単位時間内に起こる回数  $N$  はパラメータ  $\gamma$  のポアソン過程に従う

$$P_{\gamma}(N = n) = \frac{e^{-\gamma} \gamma^n}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

## 問題 3

- 0 から 1 の一様乱数  $X = U[0, 1)$  を下記の変数変換を施して得られる確率変数  $Y$  が満たす確率密度関数  $q(y)$  を求めよ。疑似一様乱数を用いて、この結果を確かめよ
  - $Y = -\log X$
  - $Y = \sqrt{X}$
- 2つの一様乱数  $X = U[0, 1)$ ,  $Y = U[0, 1)$  を用いて以下の変換で得られる確率変数  $Z$  は、平均が0、分散が1の正規分布に従う（ボックス-ミュラー法）。 $Z$  を多数を生成し確率分布を描いて確認せよ

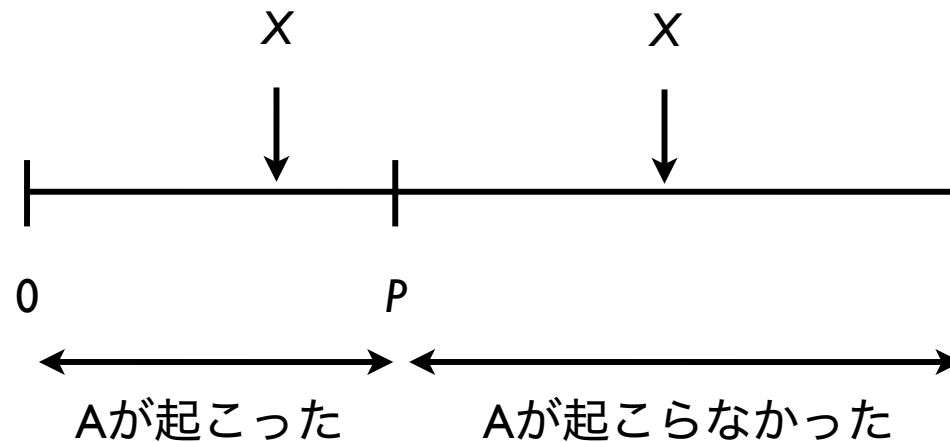
$$Z = \sqrt{-2 \log X} \cos 2\pi Y$$

# モンテカルロ法

- 乱数を用いてシミュレーションや数値計算を行う手法の総称
- 物理学や生物学などのシミュレーションに良く用いられる
- 具体例：コイン投げ、ランダムウォーク（乱歩）、など、確率論的な事象の変化をアルゴリズムとして記述して実行する

# 確率的な事象のプログラム実装

- 確率  $P$  で起こる事象  $A$  をプログラムとして実装 ( $0 \leq P \leq 1$ )
  - $[0, 1)$  の疑似一様乱数  $X$  を生成
  - $X < P$  なら、事象  $A$  が起こったと見なす。そうでなければ起こらなかったと見なす (ベルヌイ試行)



$X$  は区間  $[0, 1)$  で一様

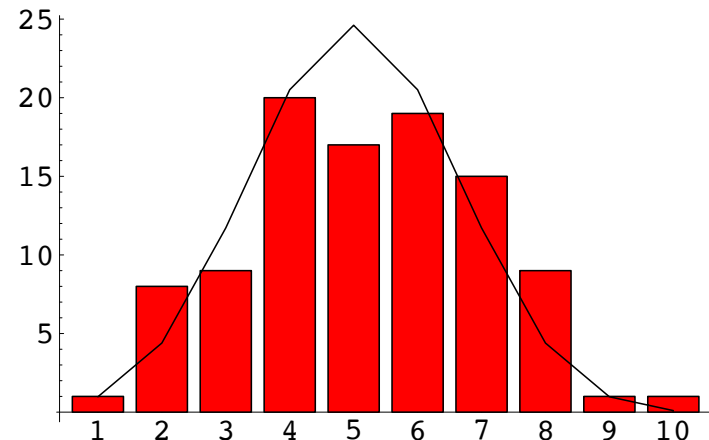
# コイン投げ

- 正しく造られたコインは裏表がでる確率は  $P = 1/2$  である。
- $n$  回コインを投げたとき、 $i$  回表がでる確率 ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) は、二項分布で与えられる (ベルヌイ試行の複数回繰り返し)

$$P_n(i) = {}_n C_i \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

具体例： $P = 1/2, n = 10$  を 100 回繰り返したとき、表が出た回数

{7, 7, 9, 8, 4, 7, 8, 3, 7, 3, 1, 4, 2, 4, 5, 5,  
6, 3, 8, 7, 5, 2, 6, 4, 4, 6, 3, 3, 5, 6, 2, 5, 8,  
2, 6, 2, 6, 4, 6, 7, 10, 4, 5, 8, 5, 4, 4, 5, 4,  
5, 3, 3, 8, 5, 5, 6, 5, 5, 4, 6, 6, 4, 2, 7, 2, 6,  
6, 6, 4, 7, 5, 6, 3, 6, 7, 3, 6, 6, 8, 5, 6, 4, 7,  
4, 2, 4, 5, 8, 7, 4, 4, 5, 7, 4, 4, 7, 7, 8, 6, 7}





## 問題 4

- コインを  $n$  回投げる試行を  $k$  回繰り返す。各試行で表が出た回数を  $i$  とする。 $i$  をファイルに書き出せ。
- 試行数  $k$  を十分大きくとったとき、 $i$  の分布図を描け。また理論分布と比較せよ。 $n$  の値は適当でよい。

1回の試行で表が出た回数に戻り値として返す関数を定義

```
int rv_binomial(int num, double prob)
{
    .....
    return count;
}
```

# 問題 5

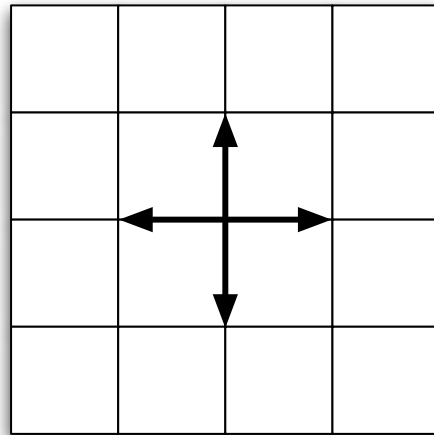
- パラメータ  $\lambda > 0$  で指数分布する乱数  $T$  を生成する事により、パラメータ  $\lambda$  に従うポアソン分布する乱数  $N$  を多数（数千個）生成し、理論と比較せよ

下記の関数を定義して用いよ

```
int rv_poisson(double lambda)
{
    .....
    return count;
}
```

# 格子上のランダムウォーク

- 2次元格子空間を考える。各個体は格子存在し、単位時間内に隣接する4つの格子のいずれかへ等しい確率  $1/4$  で移動する。
- 初期分布として原点に  $N$  個体存在する状態を考える。時刻  $t$  での個体の空間分布はどのようなものか？ ( $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ )
- また、時刻  $t$  と原点から最も離れた個体の距離との関係は？



# 格子上のランダムウォーク

- $N$  個体の位置を 2次元配列で表現するランダムウォークに取り組む
- 初期状態として全ての個体は原点に位置するとする
- 以下を繰り返す (時刻のループ)
  - 次のアルゴリズムに従って、 $N$  個体の座標を変化させる

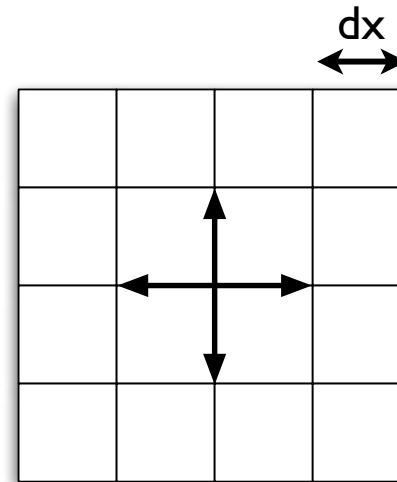
各個体の  $x, y$  座標は

確率  $1/4$  で  $x += dx$

確率  $1/4$  で  $x -= dx$

確率  $1/4$  で  $y += dx$

確率  $1/4$  で  $y -= dx$



# プログラム骨格

```
#define N 100
#define DX 1.0

double x[N], y[N] // 個体の座標

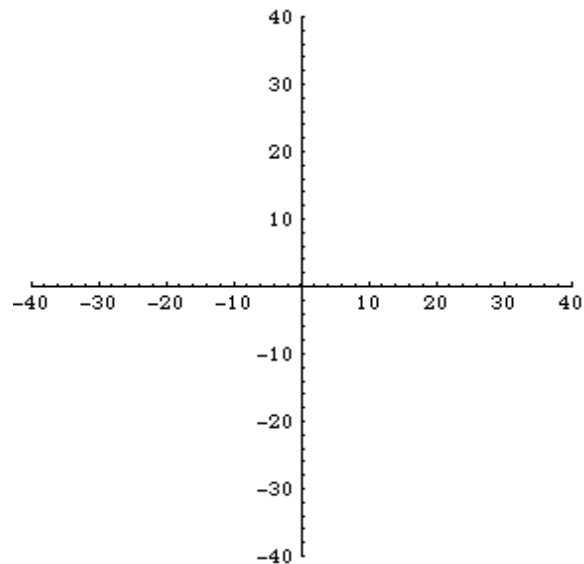
initialize();

for(step=0; step<STEP; step++){
    move_indivs(); // 個体を移動させる関数
    write_data(); // 個体の位置をファイルに書き出す
}

void move_indivs()
{
    ....
}
```

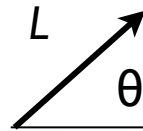
# 2次元格子上の乱歩

```
data = ReadList[ "data", Real, RecordLists -> True ];  
data2 = Map[ Partition[#, 2] &, data];  
Length[data2]  
{ Max[data2], Min[data2] }  
  
Do[  
  ListPlot[ data2[[i]], PlotRange -> {{-40, 40}, {-40, 40}}, AspectRatio -> 1 ]//Print, {i, 1,  
Length[data2]}  
]
```



## 問題 6

- 個体の位置は格子上ではなく、連続空間上にあるとする ( $x, y$  座標が実数)
- 単位時間後の個体の移動に関して**適当なルール**を設定し、 $N$  個体の移動分散の様子を調べよ。ルールとしては例えば下記が考えられる
  - ルール 1: 一定の距離  $L$  だけ移動するが、方角は任意の方向に等しい確率で移動
  - ルール 2: 移動距離は一定  $L$  だが、方向は  $N$  個体の重心へ向かう、など



自分で設定したルールの下で、空間分布の時間変化および時刻  $t$  と原点から最も離れた個体の距離との関係を調べよ