奈良女子大学　理学部　情報科学科

# 大域情報学　夏期レポート

１９９７年7月１１日配布

このレポートの提出は必須ではありませんが、提出すれば期末のレポート成績の参考資料とします。提出先はＧ３１１、提出期限は９月１２日（金）とします。なお、期限を過ぎたレポートは受け取りません。

## 1

連続時間モデルで、時刻 $t$ における集団サイズを $N(t)$ で表すことにする。１個体当たりの増加率が一定であると仮定すると、$N(t)$ の時間変化は下式で表すことができる。

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r$$

ここで、$r$は内的増加率であり、$r > 0$ であるとする。

1. 時刻 $t = 0$ で $N(0) = N_0$としたとき、上式を解け。
2. 集団サイズが５倍に増加するのに要する時間を次の３つの場合について求めよ。$r = 1$ per hour, $r = 0.5$ per day, $r = 0.2$ per week。

## 2

集団サイズ、$N_t$が、次の離散時間モデルに従って変化しているとする。

$$N_{t+1} = \frac{(1+r)N_t}{1+rN_t}$$

ただし、$r > 0$。

1. 上式を、横軸に $N_t$、縦軸に $N_{t+1}$をとった Cobweb の方法で解析せよ。
2. 上式の平衡点を求め、局所安定性解析を行え。パラメータ $r$の値が変化すると、$N_t$の振る舞いはどう変わるか？

## 3

連続時間モデルで指数的に増加している集団を考える。この集団に外部から単位時間当たりに一定量 $c$ の個体の移入（Immigration）がある場合について次の問に答えよ。

1. 集団サイズ $N(t)$ の変化を記述する式（微分方程式）を書き表せ。
2. この式を解析的に解け。ただし初期条件は、$N(0) = N_0$であるとする。
3. 移入がない場合（$c = 0$）と、ある場合（$c > 0$）について、集団サイズの増加について比較をし、生物学的な意味付けを行え。

## 4

連続時間モデルで、ロジスティック増殖をする集団の大きさ $N(t)$ は次式に従って変化する。

$$\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{K})N$$

1. この式の平衡点を求め（２つある）、それぞれについて局所安定性解析を行え。
2. この式は解析的に解くことができる。初期条件が、$N(0) = N_0$であるとして解を求めよ。

## 5

アメリカの人口の変遷（１７９０年－１９４０年）に関するデータについて、人口成長が、i) 指数的増加か、ii) 人口の増大につれて成長が鈍るか、のどちらであるかを定量的に（具体的な数値でもって）議論せよ。目で見て判断したというのは不可。

| Year | 人口（百万人） | Year | 人口（百万人） |
|---|---|---|---|
| *1790* | 3.929 | *1870* | 38.558 |
| *1800* | 5.308 | *1880* | 50.156 |
| *1810* | 7.240 | *1890* | 62.948 |
| *1820* | 9.638 | *1900* | 75.995 |
| *1830* | 12.866 | *1910* | 91.972 |
| *1840* | 17.069 | *1920* | 105.711 |
| *1850* | 23.192 | *1930* | 122.775 |
| *1860* | 31.443 | *1940* | 131.410 |

## 6

連続時間モデルで、Lotka-Volterra タイプの競争をしている２種類の生物集団、種１と種２、を考える。

1. 種１の増殖は種２の存在によって阻害されるが、種２の増殖は種１に影響されない場合の、２種の集団サイズの変化を表す式を書き下せ。
2. 上式をアイソクライン法を用いて相平面（横軸を種１の集団サイズ、縦軸を種２の集団サイズとした図）の上でどのような振る舞いをするか調べよ。
3. 上式の平衡点を求め、局所安定性解析を行え。
4. 以上の結果を生物学的観点から説明せよ。

## 7

捕食者 $P$ と非捕食者 $H$ の変化が次式の Lotka-Volterra モデルで表されているとする。

$$
\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= r_H H - aHP \\
\frac{dP}{dt} &= -r_P P + bHP
\end{aligned}
$$

1. 上式の平衡点を求め、それぞれについて局所安定性を調べよ。
2. 非自明な平衡点（原点でない方の平衡点）の近傍では、捕食者と非捕食者の集団サイズは周期 $2\pi/\sqrt{r_H r_P}$ の周期変動をすることを示せ。
3. 上の問いの答えを相平面上でグラフを用いて説明せよ。

## 8

A swimming pool is infested with algae whose population is $N(t)$. The owner attempts to control the infestation with an algicidal chemical, poured into the pool at a constant rate. In ths absence of algae, the chemical decays naturally; when algae are present it is metablised by them and kills them. The equations of the rates of change of $N(t)$ and the concentration of the chemical in the pool, $C(t)$, are

$$
\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= aN - bNC \\
\frac{dC}{dt} &= Q - \alpha C - \beta NC
\end{aligned}
$$

where $a$, $b$, $Q$, $\alpha$, $\beta$ are positive constants.

1. Discuss the meaning of each term in these equations.
2. Draw null-clines in the phase plane diagram and show the direction of flow on it.
3. Show that this system has two positive equilibria if $Q > \alpha a/b$, and in this case one of the equilibria is stable.
4. What happens if $Q < \alpha a/b$?
5. To keep the pool clean, what will you suggest to the owner?

Cambridge, NST, Part IA, Biological Mathematics, 1982 より抜粋改変