奈良女子大学　理学部　情報科学科

平成１２年度　大域情報学　夏期レポート

２０００年７月１４日配布

このレポートは必須ではないが、学期末試験で成績を判定する際の参考資料とするため、可能な限り提出することが望ましい。提出先はＧ３１１、提出期限は９月１４日（木）。なお、期限を過ぎたレポートは受け取らない。

1

離散時間ロジスティックモデルを考える。時刻 t の集団サイズを N_t で表すと、N_t の時間変化は、下式で表すことができる。

$$N_{t+1} = RN_t(1 - \frac{N_t}{K})$$

ただし $R > 1, K > 0$ であるとする。

1. 上式においてパラメータ K は N_t の時間変化に関して定性的には影響しないことを示せ。
2. 上式の平衡点を求めて、その局所安定性解析を行え。そしてパラメータ R を適当な値に固定したときの N_t の変化の様子を、横軸を N_t、縦軸を N_{t+1} とした平面上に描いて、局所安定性と絡めて議論せよ。
3. 生物の集団サイズの変化を記述するには上式のモデルは不適当な欠点がある。これについて議論せよ。

2

集団の個体数が下記のロジスティックモデルで記述される生物集団を考える。生物集団の例として、秋刀魚を考える。

$$\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{K})N$$

ここで、r は内的自然増加率、K は環境収容量である。

1. 初期条件 $N(0) = N_0$ の下で、上式を変数分離法を用いて解け。
2. この生物集団（秋刀魚）を漁獲したい。単位時間あたりの漁獲率を個体数に比例して行うとした場合、上式は次のようになる。

$$\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{K})N - aN$$

ここで、a は漁獲努力係数（$a > 0$）である。この時、持続可能な漁獲量の最大値 Y_{max} を求めよ。そして、漁獲資源の枯渇を招かずに漁獲を続けるための提言を簡潔にまとめよ。

3

アメリカ合衆国の人口の変遷（１７９０年－１９４０年）に関するデータがある。人口増加が、i) 指数的増加か、ii) 人口の増大につれて成長が鈍るか、のどちらであるかを定量的に（具体的な数値でもって）議論せよ。目で見て判断したというのは不可。

Year	人口（百万人）	Year	人口（百万人）
1790	3.929	*1870*	38.558
1800	5.308	*1880*	50.156
1810	7.240	*1890*	62.948
1820	9.638	*1900*	75.995
1830	12.866	*1910*	91.972
1840	17.069	*1920*	105.711
1850	23.192	*1930*	122.775
1860	31.443	*1940*	131.410

4

Lotka Volterra の２種系競争モデルについて答えよ。

$$\begin{aligned}\frac{dn_1}{dt} &= e_1(1 - \frac{n_1 + a_{12}n_2}{K_1})n_1 \\ \frac{dn_2}{dt} &= e_2(1 - \frac{a_{21}n_1 + n_2}{K_2})n_2\end{aligned}$$

ここで、n_1, n_2 は、それぞれ種１、種２の集団密度、e_1, e_2 は内的自然増加率、K_1, K_2 は環境収容量（種内競争）、a_{ij} は種 i が種 j から受ける種間競争の強さを表す（$a_{ij} > 0$）。

1. 相平面を用いたアイソクライン法で、２つの集団が共存する場合のアイソクラインの図を描き、両者が共存するためのパラメータ（a_{12}, a_{21}, K_1, K_2）の条件を導け。

2. このとき、種１と種２が共存する平衡点は局所的に安定であることを示せ。簡単のため、$K_1 = K_2 = 1$ として良い。

5

Lotka Volterra の捕食のモデルは次の２点に関して現実的ではない。１）捕食者が存在しないとき（$P = 0$）、被捕食者は指数的に増加すること。２）捕食は両者の密度の積（PH）に比例するため、被捕食者密度が１００倍になれば、捕食回数も１００倍になるが、現実には、餌がありすぎても捕食者が捕食できる量には限度があること。そこで、この点を補うために、モデルを次のように改良した。

$$
\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= r_H(1-\frac{H}{K})H - a\frac{H}{1+cH}P \\
\frac{dP}{dt} &= -r_P P + b\frac{H}{1+cH}P
\end{aligned}
$$

1. 上記の式の右辺各項について、生物学的な意味付けを行え。

2. 上式の振る舞いを、相平面（横軸が H、縦軸が P）を用いたアイソクライン法で解析せよ。パラメータの値によって、どのような結果が起こるかを議論せよ。

3. パラメータ値を、$r_H = r_P = 1, a = b = 0.01, c = 0.005$ と決める。局所安定性解析を行い、Kの値を変化させると、捕食者と被捕食者が共存する平衡点の安定性はどのように変化するかを調べよ。

6

Small departures (x and y) from equilibrium for a biological system, comprising two species, satisfy the following differential equations.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -x + 3y \\
\frac{dy}{dt} &= 3x - y
\end{aligned}
$$

1. Sketch the nullclines for both variables on a phase plane.

2. Find the equatios of the trajectories (i.e. separate expressions for x and y in terms of t) which start from the points (-1, 2) and (-1, 0) at $t = 0$.

3. Determine whether the equilibrium is stable or not.

Cambridge, NST, Part IA, Quantitative Biology, 1991 より抜粋改変

7

A swimming pool is infested with algae whose population is $N(t)$. The owner attempts to control the infestation with an algicidal chemical, poured into the pool at a constant rate. In the absence of algae, the chemical decays naturally; when algae are present it is metablised by them and kills them. The equations of the rates of change of $N(t)$ and the concentration of the chemical in the pool, $C(t)$, are

$$
\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= aN - bNC \\
\frac{dC}{dt} &= Q - \alpha C - \beta NC
\end{aligned}
$$

where a, b, Q, α, β are positive constants.

1. Discuss the meaning of each term in these equations.

2. Draw null-clines in the phase plane diagram and show the direction of flow on it.

3. Show that this system has two positive equilibria if $Q > \alpha a/b$, and in this case one of the equilibria is stable.

4. What happens if $Q < \alpha a/b$?

5. To keep the pool clean, what will you suggest to the owner?

Cambridge, NST, Part IA, Biological Mathematics, 1982 より抜粋改変