

1998年9月18日配布

大域情報学の単位を取得したい者は、以下の問題を解いてレポートにまとめ、9月25日中に高須(G311のレポート受け)まで提出すること。問題は裏表あるので注意すること。なお、期限を過ぎたレポートは受け取らない。

## 1

一年の内ある限られた時期にのみ繁殖するナントカという昆虫の個体数変化を考える。この昆虫については、1)各雌は $R$ 個の卵を生み、そのうち $s_E$ が翌年まで生き残り成虫となる( $s_E < 1$ )、2)卵の性比は1:1(雄と雌は同数)、3)成虫の翌年までの生存率は雌雄ともに $s_A$ ( $s_A < 1$ )であることが知られている。 $t$ 年の雌個体数を $N_t$ とすると、翌年の雌個体数 $N_{t+1}$ は、新たに生まれた個体と生き残った成虫との和で与えられる。餌や生息場所の制限がない理想的な環境であると考えて、以下の問に答えよ。

- 雌の個体数 $N_t$ の変化を表す式( $N_{t+1}$ と $N_t$ の関係)を書き下せ。
- $s_A = 0.2, s_E = 0.05, R = 100$ の時、この昆虫の個体数が100倍に増加するのに要する年数 $T_{100}$ を求めよ。
- この昆虫の大発生を抑制するために、薬剤を散布して卵の生存率 $s_E$ を下げることを考える。どの程度まで卵の生存率を下げればよいか議論せよ。

## 2

離散時間モデルで集団サイズが次式に従って変化している場合について下記の問に答えよ。

$$N_{t+1} = RN_t$$

ここで、 $R > 1$ である。

- このモデルの性質を説明し、現実との比較から不適切な点を述べよ。
- 上式の不適切な点を改めるために、式を次のように修正した。

$$N_{t+1} = \frac{R}{(1 + aN_t)^2} N_t$$

ここで、 $R > 1, a > 0$ である。

この場合、一個体が産む子供の数 $R/(1 + aN_t)^2$ は、集団サイズ $N_t$ が大きくなるにつれてどうなるか?この修正の妥当性について意見を述べよ。

- 修正したモデルの大まかな振る舞いをCobwebの方法で調べよ。また、各平衡点について局所安定性解析を行い、安定か不安定かどうかを判定せよ。

## 3

奈良博士の研究によると、カントカという魚は体長 $L$ が時間 $t$ と共に次式に従って成長するという。

$$\frac{dL}{dt} = k(L_{max} - L)$$

ここで、 $L_{max}$ はこの魚の最大限界体長、 $k$ は餌条件から決まる定数である。次の問に答えよ。

- 初期時刻 $t = 0$ でこの魚の体長は極めて小さく、 $L(0) = 0$ と見なせるとき、上式を解いて体長 $L(t)$ を時刻 $t$ の関数として求め、この関数の概型を描け。
- $L_{max} = 100$  cm、 $k = 0.01$  per day とすると、この魚が最大体長の1/2まで成長するのに要する日数を求めよ。
- この魚を生け簀で養殖して一山当てたい。市場で売れるためには体長が最大限界体長の3/4以上あることが求められる。3ヶ月(90日)で出荷できるように養殖するためには、定数 $k$ をいくりにする必要があるか?

## 4

連続時間の捕食者被捕食者モデルを考える。両者の集団サイズは次式に従って変化しているとする。

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= r\left(1 - \frac{H}{K}\right)H^2 - aHP \\ \frac{dP}{dt} &= -r_P P + bHP \end{aligned}$$

ここで、 $P$ と $H$ はそれぞれ捕食者と被捕食者の集団サイズを表す。捕食を考えないとき( $P = 0$ )、被捕食者の増加はロジスティックではないことに注意。以上をふまえて次の問に答えよ。

- $P$ 及び $H$ の時間変化を相平面上のアイソクラインを用いて調べよ。
- 上式の平衡点をすべて求めよ。

3. パラメータの値を  $r = 1, K = 10, a = 1, b = 1$  と固定する。自明でない平衡点（原点以外の平衡点）について局所安定性解析を行い、パラメーター  $r_P$  の値を変化させると、安定性がどのように変化するか調べよ。
4. パラメーター  $r_P$  がある値を越えると局所安定な平衡点がなくなる。このとき、解の挙動が相平面上でどのようなようになるかを予想せよ。

## 5

最後に、講義の感想を述べよ。（採点の対象とはしない）