奈良女子大学　理学部　情報科学科

平成 16 年度　大域情報学　試験問題

2004 年 7 月 28 日実施

次の問いに答えよ。なお、解答は別紙の解答用紙に記入すること。

問 1

時刻 t における個体密度を n_t で表す離散時間モデルを考える。n_t の変化として次式が与えられているとき、以下の問いに答えよ。

$$n_{t+1} = \frac{rn_t}{1 + an_t^2}$$

ただし、$r, a > 0$ とする。

1. 上モデルにおいて一個体あたりの増加率が n_t の減少関数 $r/(1 + an_t^2)$ で与えられることに留意し、パラメータ r, a の生物学的な意味について述べよ。
2. 上モデルを Cobwebbing の方法（横軸を n_t、縦軸を n_{t+1} とした平面上での絵解き解法）で視覚的に解け。
3. 上式の両辺に $\sqrt{a}$ を掛けて $\sqrt{a}n_t \to N_t$ と置き換えることにより、パラメータ a はモデルの定性的な振る舞いに影響しないことを示せ。
4. 上式（n_t もしくは N_t の差分式）の平衡点を全て求めて局所安定性解析を行い、各平衡点が安定であるためのパラメータの条件を導け。

裏面に続く。

問２

３つの齢クラス (age 1, age 2, age 3) から構成されるハムスターの集団を考える。このハムスター個体の寿命は３歳で、４歳以上生きることはない。齢クラス１から２への年間生存率を P_1, 齢クラス２から３への年間生存率を P_2 とする。 齢クラス３の個体が翌年まで生存する確率 P_3 はゼロである。また、齢クラス i の出生率（翌年まで生き延びる子供の数）を f_i $(i = 1, 2, 3)$ とする。すると、t 年における各齢クラスの個体密度 $n_1(t), n_2(t), n_3(t)$ はベクトルと行列を用いて次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \end{bmatrix}$$

なお、生存率、死亡率は全て非負の定数であるとする。次の問いに答えよ。

1. 齢クラス１の個体は繁殖を行なわない場合（$f_1 = 0$）、Leslie 行列 A の固有値 λ を決める特性方程式を書きだせ。特性方程式とは

$$det = |\lambda I - A| = 0$$

   である。ここで、I は単位行列、A は Leslie 行列である。

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & f_2 & f_3 \\ P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 上で求めた特性方程式の左辺を λ の関数 $f(\lambda)$ としたとき、関数 $f(\lambda)$ の極値を与える λ を求めよ。また、関数の極値を与える λ の値と関数の切片 $f(0)$ に注意して、関数 $f(\lambda)$ の概形を描け。概形を描くにあたり、x 軸、y 軸との切片など可能な限り多くの情報を盛り込むこと。

3. このハムスターの集団が長期的に増加するか減少するかは、Leslie 行列 A の最大固有値（$f(\lambda) = 0$ の解）が１を越えるか否かにかかっている。FT 博士の調査によると、ハムスター個体の生存率、死亡率は $P_1 = 0.5, P_2 = 0.8, P_3 = 0, f_1 = 0, f_2 = 1.5$ である。かわいいハムスター集団が絶滅しないために必要な、齢クラス３の出生率 f_3 の条件を求めよ。

試験問題は以上である。