

次の問いに答えよ。なお、解答は別紙の解答用紙に記入すること。

1

時刻 t における個体密度を N_t で表す離散時間モデルを考える。各個体は r 匹の子孫を残してその年のうちに死亡する場合、翌年 $t+1$ の個体密度 N_{t+1} は、前年の個体密度 N_t を用いて、

$$N_{t+1} = rN_t$$

と表すことができる。ただし、 $r > 1$ とする。これについて問いに答えよ。

1. 時刻 $t = 0$ の個体密度を N_0 としたとき、上式を解いて個体密度の対数は時間に比例して増加することを示せ。
2. このモデルでは $r > 1$ の時、個体密度は時間の経過とともに無限大に発散する。しかし、現実の系では、えさの不足や環境の悪化などにより増加率は個体密度の増加とともに減少すると思われる。そこで上式を修正し、一個体当たりの増加率が個体密度の増加とともに減少する次のモデルを考える。

$$N_{t+1} = \exp\left(r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right)N_t$$

ここで $r > 0$ である。この式には2つのパラメータ r, K が含まれているが、 N_t/K を新たな変数 x_t と置くことによって、パラメータ K はモデルの定性的な振る舞いには影響を及ぼさないことを示せ。

3. 上式の振る舞いを、横軸を x_t 、縦軸を x_{t+1} とした相平面上の Ricker diagram を用いて調べよ。また、平衡点を全て求めて局所安定性解析を行え。特に非自明な平衡点（ゼロでない平衡点）が不安定化するパラメータ r の条件を求めよ。

2

3つの年齢クラス (age 1, age 2, age 3) から構成されるリスの集団を考える。このリスの寿命は3歳で、4歳以上生きることはない。年齢クラス1から2への年間生存率を P_1 、年齢クラス2から3への年間生存率を P_2 とする。年齢クラス3の個体が翌年まで生存する確率 P_3 はゼロである。また、年齢クラス i の出生率（翌年まで生き延びる子供の数）を f_i ($i = 1, 2, 3$) とする。すると、 t 年における各年齢クラスの個体密度 $n_1(t), n_2(t), n_3(t)$ はベクトルと行列を用いて次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \end{bmatrix}$$

なお、生存率、死亡率は全て定数であるとする。次の問いに答えよ。

1. 年齢クラス1の個体は繁殖を行わない場合 ($f_1 = 0$)、Leslie 行列 A の固有値 λ を決める特性方程式を書きだせ。特性方程式とは

$$\det = |\lambda I - A| = 0$$

である。ここで、 I は単位行列、 A は Leslie 行列である。

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & f_2 & f_3 \\ P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 上で求めた特性方程式の左辺を λ の関数 $f(\lambda)$ としたとき、関数 $f(\lambda)$ の極値を与える λ を求めよ。また、関数の極値を与える λ の値と関数の切片 $f(0)$ に注意して、関数 $f(\lambda)$ の概形を描け。
3. このリスの集団が増加するか減少するかは、Leslie 行列 A の最大固有値 ($f(\lambda) = 0$ の解) が1を越えるか否かにかかっている。FT 博士の調査によると、リス集団の生存率、死亡率は $P_1 = 0.5, P_2 = 0.8, P_3 = 0, f_1 = 0, f_2 = 1.5$ である。かわいいリス集団が絶滅しないために必要な、年齢クラス3の出生率 f_3 の条件を求めよ。