奈良女子大学　理学部　情報科学科

平成１３年度　大域情報学　試験問題

２００１年８月１日実施

次の問いに答えよ。なお、回答は別紙の解答用紙に記入すること。

1

時刻 t における個体数を N_tとした離散時間モデルを考える。各個体は r匹の子孫を残してその年のうちに死亡する場合、翌年 $t+1$ の個体数 N_{t+1}は、前年の個体数 N_tを用いて、

$$N_{t+1} = rN_t$$

と表すことができる。ただし、$r > 1$ である。これについて問いに答えよ。

1. 時刻 $t = 0$ の個体数を N_0としたとき、上式を解き、個体数の対数は時間に比例して増加することを示せ。
2. このモデルでは $r > 1$ の時、個体数は時間の経過とともに無限大に発散する。しかし、現実の系では、えさの不足や環境の悪化などにより増加率は個体数の増加とともに減少すると思われる。そこで上式を修正し、一個体当たりの増加率が個体数の増加に比例して減少するモデルを考える。

   $$N_{t+1} = \exp(r(1 - \frac{N_t}{K}))N_t$$

   この式には２つのパラメータ r, Kが含まれているが、N_t/K を新たな変数 x_tと置くことによって、パラメータ Kはモデルの定性的な振る舞いには影響を及ぼさないことを示せ。
3. 上式を x_tの式に書き直したモデルの平衡点をすべて求めよ。そして、横軸を x_t、縦軸を x_{t+1}とした相平面上で Cobweb の方法を用いて x_tの時間変化を解析せよ。自明でない平衡点（ゼロでない平衡点のこと）について局所安定性解析を行い、この平衡点が不安定となる rの条件を求めよ。

2

連続時間モデルを考える。捕食者と被捕食者の集団密度をそれぞれ P、Hとしたとき、両者は以下の微分方程式にしたがって変化している場合を考える。

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= r_H(1 - \frac{H}{K})H - aHP \\ \frac{dP}{dt} &= -r_P P + bHP\end{aligned}$$

ただし、パラメータ r_H, r_P, K, a, b はすべて正であるとする。

1. 上式の右辺各項について生物学的な意味づけを行え。
2. 初期時刻 $t = 0$ において、$P(0) > 0, H(0) > 0$ であるとする。捕食者をすべて取り除いたとき（$P = 0$）、被捕食者の集団密度はある値に収束する。この収束値を求めよ。
3. 横軸を H、縦軸を Pとした相平面上に、Pと Hのアイソクラインを描き、どのような解の軌道が可能であるか示せ。
4. 上式の平衡点をすべて求め、それぞれについて局所安定性解析を行え。局所安定性がパラメータ Kの値にどのように依存しているかを調べよ。なお、局所安定性解析に際しては $r_H = r_P = 1, a = b = 1$ とおいてよい。
5. 以上の解析結果を基に、パラメータ Kの生物学的な意味とモデルの振る舞いを関連づけて議論せよ。