

## 平成 19 年度 大域情報学 試験問題

2007 年 7 月 25 日実施

次の問いに答えよ。解答は 3 つの問い毎に別紙の解答用紙に記入すること。

### 問 1

連続時間における捕食者と被捕食者の個体群動態モデルを考える。捕食者の集団サイズを  $P$ 、被食者の集団サイズを  $H$  としたとき、両者は以下の微分方程式に従うというモデルである。

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= r_H \left(1 - \frac{H}{K}\right) H - aHP \\ \frac{dP}{dt} &= -r_P P + bHP\end{aligned}$$

パラメータ  $r_H, r_P, K, a, b$  はすべて正である。

1. 上式の右辺各項について生物学的な意味づけを行え。
2. 捕食者が存在しない状況で ( $P = 0$ )、被捕食者の集団サイズ  $H$  を時刻  $t$  の関数として求めよ。
3. 横軸を  $H$ 、縦軸を  $P$  とした相平面上に  $P$  と  $H$  のアイソクラインを描き、解軌道の様子を描け。
4. 上モデルの平衡点を 全て 求め、それぞれについて局所安定性解析を行え。局所安定性がパラメータ  $K$  の値にどのように依存しているかを調べよ。なお、局所安定性解析に際しては  $r_H = r_P = 1, a = b = 1$  とおいてよい。
5. 以上の解析結果を基に、パラメータ  $K$  の生物学的な意味とモデルの振る舞いを関連づけて議論せよ。

裏に続く。

## 問2

2つの年齢クラスをもつ生物集団を考える。年  $t$  における年齢1歳の集団サイズを  $N_1(t)$ 、2歳の集団サイズを  $N_2(t)$  とする。1歳集団の1個体あたりの繁殖価を  $f_1$ 、2歳集団のそれを  $f_2$ 、1歳から2歳へ至る生存率を  $s_H$  とする。この生物個体は2歳を超えて生きることはないとすると、 $N_1(t)$  と  $N_2(t)$  の個体群動態モデルとして次式を得る。

$$\begin{pmatrix} N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ s_H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{pmatrix}$$

このモデルについて問いに答えよ。

1.  $f_1 = 0.5, f_2 = 1.2, s_H = 0.5$  の時、この個体群動態の振る舞いはどのようなになるか、根拠を示して記述せよ。
2. 1歳から2歳へ至る生存率  $s_H$  が周期的に隔年変動する状況を考える。奇数年に  $s_H = s_{H1}$ 、偶数年に  $s_H = s_{H2}$  となる時、 $2 \times t$  年（偶数年）における集団サイズ  $(N_1(2t), N_2(2t))$  を初期値  $(N_1(0), N_2(0))$  を使って式で表せ。
3.  $f_1 = 0.5, f_2 = 1.2, s_{H1} = 0.5$  とする。十分大きな  $t$  に対し、この生物集団が絶滅するための  $s_{H2}$  に関する条件を求めよ。

行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の固有値の絶対値が1未満である必要十分条件は、 $2 > 1 + \text{Det}A > |\text{Trace}A|$ 、を用いて良い。

## 問3

離散時間における個体群動態が次式に従う生物集団について問いに答えよ。時刻  $t$  における集団密度を  $n_t$  とする。

$$n_{t+1} = \exp\left[r\left(1 - \frac{n_t}{K}\right)\right] n_t = f(n_t)$$

1. 上モデルには  $r$  と  $K$  の2つのパラメータが含まれるが、パラメータ  $K$  は系の振る舞い、数列  $(n_0, n_1, \dots, n_t, \dots)$ 、に定性的には影響しないことを示せ。
2. 上モデルを Cobwebbing の方法（横軸を  $n_t$ 、縦軸を  $n_{t+1} = f(n_t)$  とした平面上での絵解き解法）で視覚的に解け。グラフを描く際には、原点  $n_t = 0$  での関数  $f(n_t)$  の傾き並びに  $\lim_{n_t \rightarrow \infty} f(n_t)$  の値に留意すること。
3. 上式の平衡点  $n^*$  を 全て 求め、それぞれについて局所安定性解析を行って局所安定性を判定せよ。

試験問題は以上である。